詳細解答

STEP III 2008，第 3 題

純數學 • 橢圓的切線與焦點

STEP III 2008，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

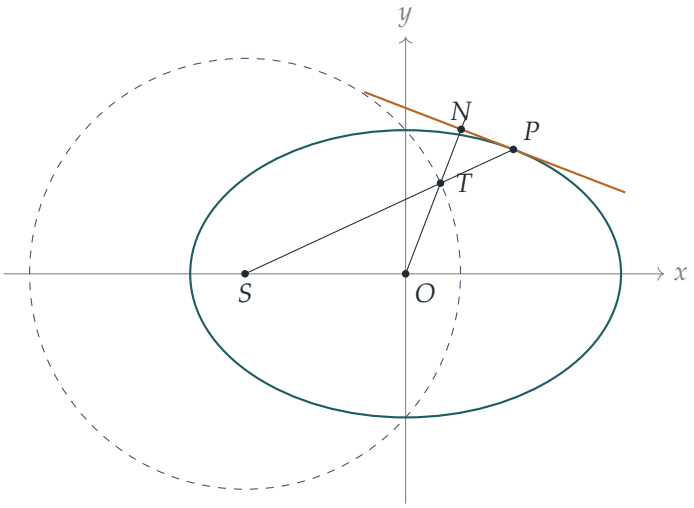
step.maths.org/questions/08-s3-q3

關鍵思路

整道題只涉及兩條直線，所以要做的就是把它們的方程乾淨利落地寫出來，然後求交點。直線 ON 垂直於切線（tangent），所以它的方向就是切線的法向量（normal vector），可以直接從切線方程讀出。由 S 出發把 SP 參數化（parametrise），求交點便只需一行計算；而求得的參數原來正是處理圓時所需要的：它告訴我們點 T 位於 SP 上幾分之幾的位置。

解答

全題中 $0 < e < 1$：我們有 $e^2 = 1 - b^2/a^2$，由於 $a > b > 0$，此值嚴格介乎 0 與 1 之間。我們亦假設 $\sin\theta \neq 0$。若 $\sin\theta = 0$，則 $P = (\pm a, 0)$，切線為 $x = \pm a$，$N = P$，而 ON 和 SP 都是 x 軸，所以 T 沒有定義。



（圖中取 $a = 3$，$b = 2$，$\theta = 60°$。橢圓（ellipse）為藍綠色，在 P 的切線為琥珀色，虛線圓的圓心為 S，半徑為 a。）

T 的 y 坐標

對 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 作隱函數微分（implicit differentiation），或直接引用標準結果，可知在 (x_1, y_1) 的切線為 $xx_1/a^2 + yy_1/b^2 = 1$。在 P 處，這就是

$$\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1.$$

直線 $px + qy = 1$ 的法向量為 (p, q)，所以切線的法向量為 $(\frac{\cos\theta}{a}, \frac{\sin\theta}{b})$，或者乘以 ab 後，寫成 $(b\cos\theta,\, a\sin\theta)$。直線 ON 沿這個方向通過 O（它垂直於切線），所以線上的點為 $\mu(b\cos\theta, a\sin\theta)$，其方程為

$$a\sin\theta\, x = b\cos\theta\, y. \tag{1}$$

現在由 S 出發把 SP 參數化：線上的點為

$$(-ea + \lambda a(\cos\theta + e),\ \lambda b\sin\theta),$$

其中 $\lambda = 0$ 對應 S，$\lambda = 1$ 對應 P。代入 (1)，並約去因子 $\sin\theta \neq 0$，得

$$a(-ea + \lambda a(\cos\theta + e)) = \lambda b^2\cos\theta$$
$$\lambda(a^2\cos\theta + a^2e - b^2\cos\theta) = ea^2.$$

焦點(focus)條件正是在這裏派上用場：$a^2 - b^2 = a^2e^2$，所以括號內的式子是 $a^2e^2\cos\theta + a^2e = a^2e(1 + e\cos\theta)$。除以 $a^2e \neq 0$，得

$$\lambda = \frac{1}{1 + e\cos\theta},$$

這一步是合理的，因為 $1+e\cos\theta \geq 1-e > 0$。因此 T 的 y 坐標為

$$y_T = \lambda b\sin\theta = \frac{b\sin\theta}{1+e\cos\theta},$$

正如所求。（留待稍後參考：由 (1) 可得 $x_T = \dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}\,y_T = \dfrac{a(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta}$。）

T 位於以 S 為圓心、半徑為 a 的圓上

想一想 我們已經知道線段 ST 佔 SP 的幾分之幾。還需要知道甚麼？

由於 $T = S+\lambda(P-S)$ 且 $\lambda > 0$，我們有 $ST = \lambda\,SP$。所以只需求出長度 SP，即 P 的焦半徑（focal distance）：

$$\begin{aligned} SP^2 &= (a\cos\theta + ea)^2 + b^2\sin^2\theta \\ &= a^2[\cos^2\theta + 2e\cos\theta + e^2 + (1-e^2)\sin^2\theta] \\ &= a^2[(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + 2e\cos\theta + e^2(1-\sin^2\theta)] \\ &= a^2[1+2e\cos\theta+e^2\cos^2\theta] = a^2(1+e\cos\theta)^2, \end{aligned}$$

其中第二行用了 $b^2 = a^2(1-e^2)$。由於 $a > 0$ 且 $1+e\cos\theta > 0$，由此得 $SP = a(1+e\cos\theta)$。於是

$$ST = \lambda\,SP = \frac{a(1+e\cos\theta)}{1+e\cos\theta} = a,$$

所以 T 位於以 S 為圓心、半徑為 a 的圓上。

（如果你寧願直接用坐標計算：$x_T + ea = \dfrac{a(\cos\theta+e)}{1+e\cos\theta}$，而 $(x_T+ea)^2 + y_T^2$ 可化簡為 a^2，所用的代數運算與上面計算 SP^2 時完全相同。）

驗算

- 當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，$P = (0,b)$，切線為 $y = b$，所以 ON 是 y 軸，而 $T = (0, y_T)$，由公式得 $y_T = b$。於是 $ST^2 = e^2a^2 + b^2 = a^2$，與預期相符。
- 取 $a = 3$，$b = 2$，$\theta = 60^\circ$（即圖中的情況），以數值方法求兩條直線的交點，得 $T \approx (0.4857,\ 1.2618)$；公式則給出 $y_T = \sqrt{3}/(1+\sqrt{5}/6) \approx 1.2618$，而 $ST \approx 3.0000$。
- 在趨向圓的極限 $e \to 0$ 之下，$S \to O$ 且 $T \to P$，而後者確實位於以 O 為圓心、半徑為 a 的圓上。

常見錯誤

- 把 ON 當成平行於切線，而不是垂直於切線：ON 的方向是法向量 $(b\cos\theta, a\sin\theta)$，而不是 $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$。
- 忘記把 $a^2 - b^2$ 換成 a^2e^2，結果得到一個無法化簡的 λ 表達式。
- 除以 $\sin\theta$ 而不加說明；$\sin\theta = 0$ 的情況確實不成立。

STEP 之外

結果 $SP = a(1 + e\cos\theta) = a + ex_P$ 其實是焦點—準線性質（focus–directrix property）的另一種面貌：到焦點的距離等於到準線 $x = -a/e$ 的距離的 e 倍。以焦點為極點，用極坐標（polar coordinates）把圓錐曲線（conic）寫成 $r = \ell/(1 + e\cos\phi)$，正是大學一年級力學課描述開普勒（Kepler）軌道的方式，而同一個分母 $1 + e\cos\theta$ 亦在這裏出現了。關於圓錐曲線的幾何，以及更多 STEP 風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；關於軌道，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。