詳細解答

STEP III 2008，第 2 題

純數學 • 冪和

> **STEP III 2008，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q2

關鍵思路

$(r+1)^k - r^k$ 的和可以裂項相消（telescoping），最後只剩下一項。但我們也可以用二項式定理（binomial theorem）把每個括號展開，這樣同一個和就變成較低次冪和 $S_j(n)$ 的組合。令兩者相等，便得到一條遞推關係（recurrence），可由前面各個冪和逐一建立 S_{k-1}；而要看出第 (ii) 部分的多項式結構，所需的也正是這條遞推關係。

解答

第 (i) 部分

首先是裂項相消。把和式逐項寫出，

$$\sum_{r=0}^{n}\left[(r+1)^k - r^k\right] = (1^k - 0^k) + (2^k - 1^k) + \cdots + ((n+1)^k - n^k) = (n+1)^k,$$

因為中間各項全部互相抵消，而且 $0^k = 0$（因為 $k \geq 1$）。

其次是二項式定理。對每個 r，

$$(r+1)^k - r^k = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}r^j = 1 + \binom{k}{1}r + \binom{k}{2}r^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}r^{k-1},$$

因為 r^k 項互相抵消。對 $r = 0, 1, \ldots, n$ 求和，常數 1 貢獻 $n+1$（r 共有 $n+1$ 個值），而每個 r^j（$j \geq 1$）則貢獻 $S_j(n)$。所以

$$(n+1)^k = (n+1) + \binom{k}{1}S_1(n) + \binom{k}{2}S_2(n) + \cdots + \binom{k}{k-2}S_{k-2}(n) + \binom{k}{k-1}S_{k-1}(n).$$

最後一個係數是 $\binom{k}{k-1} = k$。至於其餘各項，我們利用對稱性 $\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$，可知 $S_{k-j}(n)$ 的係數是 $\binom{k}{k-j} = \binom{k}{j}$；特別地，$S_1(n)$ 的係數是 $\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1}$。把 $kS_{k-1}(n)$ 留在一邊，其餘各項全部移到另一邊，得

$$kS_{k-1}(n) = (n+1)^k - (n+1) - \binom{k}{2}S_{k-2}(n) - \binom{k}{3}S_{k-3}(n) - \cdots - \binom{k}{k-1}S_1(n),$$

這正是所求的 $(*)$。（這裏需要 $k \geq 2$，S_{k-1} 才是我們所定義的和之一。）

想一想 為甚麼我們把 $j = 0$ 的一項分開處理，而不把它寫成 $S_0(n)$？

S_k 只對正數 k 有定義，而且在 $r = 0$ 時「0^0」的意義並不明確。把常數抽出來，直接數出它的總和是 $n+1$，就能同時避開這兩個問題，也解釋了 $(*)$ 中那個單獨出現的 $-(n+1)$。

$S_3(n)$。在 $(*)$ 中取 $k = 4$，這時 $\binom{4}{2} = 6$ 及 $\binom{4}{3} = 4$：

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)^4 - (n+1) - 6S_2(n) - 4S_1(n) \\ &= (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1). \end{aligned}$$

每一項都有因式 $n+1$，所以

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right] \\ &= (n+1)\left[n^3 + 3n^2 + 3n - 2n^2 - n - 2n\right] \\ &= (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

因此

$$S_3(n) = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \big(S_1(n)\big)^2.$$

$S_4(n)$。取 $k = 5$，這時 $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$ 及 $\binom{5}{4} = 5$：

$$5S_4(n) = (n+1)^5 - (n+1) - 10S_3(n) - 10S_2(n) - 5S_1(n).$$

我們再次抽出因式 $n+1$，並代入 S_3、S_2 和 S_1 的表達式：

$$\begin{aligned} 5S_4(n) &= (n+1)\left[(n+1)^4 - 1 - \tfrac{5}{2}n^2(n+1) - \tfrac{5}{3}n(2n+1) - \tfrac{5}{2}n\right] \\ &= (n+1)\Big[n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \tfrac{5}{2}n^3 - \tfrac{5}{2}n^2 \\ &\qquad - \tfrac{10}{3}n^2 - \tfrac{5}{3}n - \tfrac{5}{2}n\Big] \\ &= (n+1)\left[n^4 + \tfrac{3}{2}n^3 + \tfrac{1}{6}n^2 - \tfrac{1}{6}n\right] \\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1)\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right). \end{aligned}$$

由於 S_4 應該像 S_2 一樣含有因式 $2n+1$，我們把 $n = -\frac{1}{2}$ 代入這個三次式試一試：$-\frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - 1 = 0$。所以 $2n+1$ 是因式，而 $6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$。於是

$$S_4(n) = \tfrac{1}{30}\,n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1).$$

第 (ii) 部分

我們對 k 使用強歸納法（strong induction）。命題在 $k=1$ 時成立，因為 $S_1(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ 的次數是 2（在 $k=2$ 時亦成立）。

假設對某個 $k\geq 2$，$S_1(n),\ldots,S_{k-1}(n)$ 每一個都是 n 的多項式（polynomial），其中 S_j 的次數是 $j+1$。在 $(*)$ 中以 $k+1$ 代替 k：

$$(k+1)\,S_k(n)=(n+1)^{k+1}-(n+1)-\binom{k+1}{2}S_{k-1}(n)-\cdots-\binom{k+1}{k}S_1(n).$$

在右邊：

- $(n+1)^{k+1}$ 是次數為 $k+1$ 的多項式，首項係數（leading coefficient）是 1；
- $n+1$ 的次數是 1；
- 根據歸納假設，每個 $S_j(n)$（$1\leq j\leq k-1$）都是次數為 $j+1\leq k$ 的多項式。

所以右邊是一個多項式，它的 n^{k+1} 項只來自 $(n+1)^{k+1}$，不可能被抵消。除以 $k+1\neq 0$ 後，可知 $S_k(n)$ 是次數恰好為 $k+1$ 的多項式（首項係數是 $\frac{1}{k+1}$）。歸納至此完成。

> **想一想** 多項式 $P(n)$ 的「常數項」和「各係數之和」分別對應甚麼？

它們就是 $P(0)$ 和 $P(1)$。設 $S_k(n)=P(n)=a_{k+1}n^{k+1}+\cdots+a_1n+a_0$；對每個整數 $n\geq 0$，它都與和式 $\sum_{r=0}^{n}r^k$ 相等，所以我們可以代入 $n=0$ 和 $n=1$ 求值。

- 常數項：$a_0=P(0)=S_k(0)=0^k=0$，因為 $k\geq 1$。
- 各係數之和：$a_{k+1}+\cdots+a_1+a_0=P(1)=S_k(1)=0^k+1^k=1$。

兩個結果均已證明。

驗算

- 較小的數值：$S_3(3)=1+8+27=36=\frac{1}{4}\cdot 9\cdot 16$，以及 $S_4(3)=1+16+81=98=\frac{1}{30}\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 35$。
- 用我們的答案檢驗第 (ii) 部分：$S_4(n)=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$ 的常數項是 0，各係數之和是 $\frac{6+15+10-1}{30}=1$；它的首項係數是 $\frac{1}{5}=\frac{1}{k+1}$，與歸納法所預測的一致。
- 我們以直接求和的方法，對 $2\leq k\leq 9$ 及 $0\leq n\leq 30$ 準確地驗證了 $(*)$，並對 $0\leq n<200$ 驗證了兩個閉合形式（closed form）。

常見錯誤

- 忘記了 $\sum 1$ 中 $r = 0$ 的一項：它的貢獻是 $n+1$，而不是 n。
- 沒有先抽出公因式 $n+1$，而是把所有項全部展開，令 S_4 的代數運算繁複得多。
- 在第 (ii) 部分只說次數「至多是 $k+1$」。題目要求的是恰好 $k+1$，所以要指出 n^{k+1} 項不可能被抵消。

STEP 之外

這些多項式的係數由伯努利數（Bernoulli numbers）決定，而福爾哈伯公式（Faulhaber's formula）把 $S_k(n)$ 寫成 n 的各次冪的組合，其係數是二項式係數（binomial coefficients）乘以伯努利數。$S_k(n)$ 是次數為 $k+1$ 的多項式，首項是 $\frac{n^{k+1}}{k+1}$，這一事實正是 $\int_0^x t^k \,\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ 的離散類比，而有限差分學（calculus of finite differences）把這個想法嚴格化。想做更多同類題目，可試試 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。