詳細解答

STEP III 2008，第 11 題

力學 • 轉動動力學

STEP III 2008，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

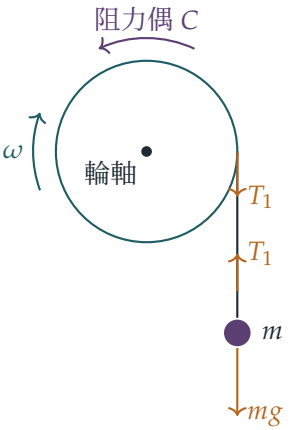
step.maths.org/questions/08-s3-q11

關鍵思路

力偶（couple）恆定，即角減速度（angular deceleration）恆定，所以繩子脫離之後，輪子服從轉動版本的「suvat」方程，而第一個結果不過是「距離 = 平均速率 × 時間」。同一階段亦讓我們以 I 表示阻力偶的大小。至於下降階段，能量方程是最自然的工具：我們知道各部分移動了多遠，而克服恆定力偶所作的功就是力偶 × 角度。

解答

模型。輪子是繞固定光滑輪軸轉動的剛體（rigid body），唯一例外是受到一個大小恆為 C 的阻力偶（resisting couple），它在整個運動過程中都起作用（質點下降期間如是，其後亦如是）。繩子是輕而不可伸長的，並且不打滑，所以繩子仍然連着時，質點的速率為 $v = r\omega$，其中 ω 是輪子的角速率（angular speed）。



繩子從輪子的右邊離開，所以質點下落時輪子順時針轉動，而力偶 C 則逆時針作用，阻礙運動。（我們其實用不着繩子的張力（tension）T_1，因為我們用的是能量方法。）

繩子脫離之後

此時輪子所受的力偶只有 C，所以對輪軸取矩（taking moments），

$$I\dot{\omega} = -C,$$

而角減速度 C/I 是常數。因此角速率在時間 T 內由 ω_0 線性地下降至 0，所以

$$\omega_0 = \frac{C}{I}\,T, \qquad \text{即} \qquad C = \frac{I\omega_0}{T}. \tag{1}$$

角速率既然線性下降，平均角速率就是 $\frac{1}{2}(\omega_0 + 0)$，而轉過的角度等於平均角速率乘以時間。這個角度是 n_2 轉，即 $2\pi n_2$ 弧度（radians），所以

$$\tfrac{1}{2}\omega_0 T = 2\pi n_2,$$

這就是第一個結果。（它是 $s = \frac{1}{2}(u+v)t$ 的轉動版本。）由此亦得

$$\omega_0 = \frac{4\pi n_2}{T}, \qquad \text{於是由 (1) 得} \qquad C = \frac{4\pi n_2 I}{T^2}. \tag{2}$$

質點下降期間

輪子轉過 n_1 轉（即 $2\pi n_1$ 弧度）期間，繩子鬆開的長度為 $2\pi n_1 r$，所以質點下落的距離為 $2\pi n_1 r$。在脫離的一刻，輪子的角速率為 ω_0，而由於繩子沒有打滑，質點的速率為 $r\omega_0$。

想一想 既然有阻力，為甚麼這裏仍可以用能量？

能量並不守恆，但功能原理（work–energy principle）依然成立：勢能（potential energy）的損失等於動能（kinetic energy）的增加，再加上克服阻力所作的功。轉過角度 θ 時，克服恆定力偶 C 所作的功為 $C\theta$，正如克服恆力所作的功是力 $\times$ 距離。張力對整個系統不作淨功，因為繩子輕而不可伸長，並且不打滑，所以它對輪子所作的功恰好等於它從質點取走的功。

所以，由釋放至脫離，

$$mg\,(2\pi n_1 r) = \tfrac{1}{2}m(r\omega_0)^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 + C\,(2\pi n_1).$$

現在把 (2) 中的 ω_0 和 C 代入：

$$2\pi mgrn_1 = \tfrac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\frac{16\pi^2 n_2^2}{T^2} + 2\pi n_1 \cdot \frac{4\pi n_2 I}{T^2}.$$

全式乘以 $T^2/(2\pi)$，

$$\begin{aligned} mgrn_1T^2 &= 4\pi n_2^2\,(mr^2+I) + 4\pi n_1 n_2 I \\ &= 4\pi mr^2 n_2^2 + 4\pi n_2(n_1+n_2)\,I. \end{aligned}$$

移項，再除以 $4\pi n_2(n_1+n_2)$（此數為正），

$$I = \frac{mgrn_1T^2 - 4\pi mr^2 n_2^2}{4\pi n_2(n_1+n_2)},$$

正是所求。

驗算

- 量綱。分子的兩項 $mgrT^2$ 和 mr^2 都具有轉動慣量(moment of inertia)的單位($\mathrm{kg\,m^2}$)，而 n_1、n_2 是純數。
- 數值驗算。我們取 $I = 0.5\,\mathrm{kg\,m^2}$、$m = 1\,\mathrm{kg}$、$r = 0.2\,\mathrm{m}$、$C = 0.5\,\mathrm{N\,m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 和 $n_1 = 5$，以數值方法逐步計算這個運動。結果是 $\omega_0 \approx 13.03\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$、$T \approx 13.03\,\mathrm{s}$ 和 $n_2 \approx 13.52$。於是 $\frac{1}{2}\omega_0 T \approx 84.94 \approx 2\pi n_2$，而公式給出 $I = 0.5000$。
- 沒有阻力。若 $C \to 0$，輪子永不停下，所以 T 和 n_2 都趨向無限大；公式的表現仍然合理，因為分子的增長如 T^2，而分母的增長如 $n_2^2 \propto T^2$。

常見錯誤

- 漏掉下降期間克服阻力所作的功。題目說明力偶是恆定的，而且它自始至終都起作用，並非只在繩子脫離之後。少了這一項，公式就會出錯：在上面的例子中，會得出 $I \approx 0.39$ 而不是 0.5。
- 忘記質點的動能 $\frac{1}{2}mr^2\omega_0^2$；$-4\pi mr^2 n_2^2$ 這一項正是由此而來。
- 混淆轉數與弧度：n 轉等於 $2\pi n$ 弧度。

STEP 之外

這是一個巧妙的實驗方法：只要量度輪子由轉動至停下所需的時間，並數算轉數，就可以同時測出它的轉動慣量和軸承的摩擦，即使事前兩者皆不知道。大學本科的力學會把這些內容發展成完整的剛體轉動理論，其中角動量(angular momentum)和力矩(torque)分別扮演動量和力的角色，而對於繞任意軸旋轉的物體，轉動慣量則變成一個張量（tensor）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對此有細緻的闡述，並附有許多正是這種風格的習題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。