詳細解答

STEP III 2008，第 10 題

力學 • 彈性繩與能量

> **STEP III 2008，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q10

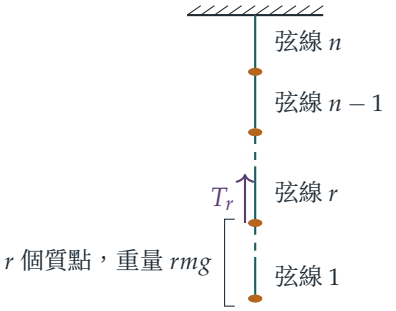
關鍵思路

每條短弦線都要承托懸掛在它下方的一切，所以它的張力（tension）很容易寫出；再由胡克定律（Hooke's law）得出它的伸長量（extension）和所儲存的能量，而總和就是 r 與 r^2 的標準求和。繩子的情況其實是同一幅圖畫，只是質量分散開來：把它切成 n 等份，把每一份的質量當作位於其下端的一個質點（particle），再讓 $n \to \infty$。求和變成積分，而長度中的因子 $\frac{1}{2}$ 之所以出現，是因為平均而言，繩子的每一小段承托著繩子一半的重量。

解答

掛著質點的弦線

把各條短弦線視為遵從胡克定律的輕彈性弦線（light elastic string），並把各個質量視為質點。按題目所述，由底部起為弦線編號，於是弦線 r 下方有 r 個質點：它自己的質點，以及弦線 $1, \ldots, r-1$ 的質點。



整個系統處於靜止狀態。考慮弦線 r 頂端以下的一切：弦線 r、弦線 $1,\dots,r-1$，以及掛在它們上面的 r 個質點。作用於這部分的外力只有向下的重量 rmg 和弦線 r 中向上的張力 T_r（弦線是輕的）。所以

$$T_r = rmg.$$

根據胡克定律，弦線 r 的伸長量為

$$x_r = \frac{T_r\,\ell}{\lambda} = \frac{rmg\ell}{\lambda}.$$

所以長弦線的長度為

$$\sum_{r=1}^{n}(\ell + x_r) = n\ell + \frac{mg\ell}{\lambda}\sum_{r=1}^{n} r = n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda}.$$

自然長度(natural length)為 ℓ 的弦線伸長了 x 時，其彈性能(elastic energy)為 $\lambda x^2/(2\ell)$。對弦線 r 而言，這等於

$$\frac{\lambda}{2\ell}\Big(\frac{rmg\ell}{\lambda}\Big)^2 = \frac{r^2m^2g^2\ell}{2\lambda},$$

再利用 $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，總彈性能為

$$\frac{m^2g^2\ell}{2\lambda}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)\,m^2g^2\ell}{12\lambda}.$$

有重量的繩子

想一想 對於質量連續分佈的繩子，第一部分能幫上甚麼忙？

把繩子切成 n 等份。每一份的自然長度為 $\ell = L_0/n$，質量為 $m = M/n$，而且每一份的彈性模量（modulus）都與整條繩子相同，同為 λ（模量與小段的長度無關）。如果把每一份的質量集中在其下端，得到的正正就是上面那條長弦線。當 $n\to\infty$ 時，各小段愈來愈短，這個集中質量的模型便趨近真實的繩子。

代入長度的公式，

$$n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda} = L_0 + \frac{n(n+1)}{2\lambda}\cdot\frac{Mg}{n}\cdot\frac{L_0}{n} = L_0 + \frac{MgL_0}{2\lambda}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \longrightarrow L_0\Big(1+\frac{Mg}{2\lambda}\Big)$$

當 $n\to\infty$。所以

$$L = L_0\Big(1+\frac{Mg}{2\lambda}\Big),$$

正如所求。

你也可以直接計算。設 s 為某一點下方繩子的自然長度，則該點所承托的重量為 Mgs/L_0。在該處取自然長度為 δs 的一小段，其張力為 $T = Mgs/L_0$，所以它伸長了 $T\,\delta s/\lambda$。全部加起來，

$$L - L_0 = \int_0^{L_0}\frac{Mgs}{\lambda L_0}\,\mathrm{d}s = \frac{MgL_0}{2\lambda}.$$

至於能量，作同樣的代入可得

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12\lambda}\cdot\frac{M^2g^2}{n^2}\cdot\frac{L_0}{n}=\frac{M^2g^2L_0}{12\lambda}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\longrightarrow\frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}.$$

（直接計算：該小段儲存的能量為 $T^2\,\delta s/(2\lambda)$，而 $\int_0^{L_0}\frac{M^2g^2s^2}{2\lambda L_0^2}\,\mathrm{d}s=\frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}$。）

要把結果以 L、L_0 和 λ 表示，可利用長度的公式消去 Mg：

$$L-L_0=\frac{MgL_0}{2\lambda}\quad\Longrightarrow\quad Mg=\frac{2\lambda(L-L_0)}{L_0}.$$

因此繩子所儲存的彈性能為

$$\frac{L_0}{6\lambda}\cdot\frac{4\lambda^2(L-L_0)^2}{L_0^2}=\frac{2\lambda(L-L_0)^2}{3L_0}.$$

驗算

- 取 $n=1$ 時，第一部分給出長度 $\ell+mg\ell/\lambda$ 和能量 $m^2g^2\ell/(2\lambda)$：這正是一條弦線掛著一個質點的情況，理應如此。
- 試比較一條總伸長量同為 $e=L-L_0$、但張力均勻的繩子：它所儲存的能量是 $\lambda e^2/(2L_0)$。我們的答案是這個值的 $\frac{4}{3}$ 倍，這是合理的，因為拉伸集中在頂部附近，而能量隨局部應變（strain）的平方增長。
- 數值上，取 $M=3$、$L_0=2$、$\lambda=50$、$g=9.8$：公式給出 $L=2.588$ 和能量 5.7624；取 $n=100\,000$ 的離散鏈則給出 2.58801 和 5.76249，而 $2\lambda(L-L_0)^2/(3L_0)=5.7624$。

常見錯誤

- 把弦線 r 的張力當作 $(n-r+1)mg$：按題目的編號，弦線 n 在最頂，所以弦線 r 承托的是 r 個質點。
- 把每一小段繩子的模量取為 λ/n。模量是材料和橫截面的性質，與長度無關；隨長度改變的是勁度（stiffness）λ/ℓ。
- 題目要求以 L、L_0 和 λ 表示能量，卻把答案留在以 M 和 g 表示的形式。

STEP 之外

由 n 個集中質量過渡到連續的繩子，是連續介質力學（continuum mechanics）最基本的一步：張力變成函數 $T(s)$，胡克定律變成局部應力（stress）與應變之間的關係，而能量變成能量密度的積分。同樣是這條由質量和彈簧組成的鏈，一旦讓它振動起來，取

極限後便得到弦線的波動方程（wave equation）。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）是了解這些想法如何展開的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。