詳細解答

STEP III 2008，第 1 題

純數學 • 非線性聯立方程

> **STEP III 2008，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q1

關鍵思路

設 $s_k = ax^k + by^k$，則題目的方程給出了 s_0, s_1, s_2, s_3。由於 x 和 y 是 $t^2 - pt + q = 0$ 的兩個根，其中 $p = x + y$、$q = xy$，這些冪和(power sums)滿足一個遞推關係(recurrence)：每個 s_k 等於 p 乘以前一項，再減去 q 乘以再前一項。這正是提示中「乘以 $x + y$」所得到的結果。於是四條非線性方程化為關於 p 和 q 的兩條線性方程。之後解一條二次方程便得 x 和 y，再由首兩條方程求出 a 和 b。

解答

設 $s_k = ax^k + by^k$，其中 $k = 0, 1, 2, 3$，則 $s_0 = 1$、$s_1 = \frac{1}{3}$、$s_2 = \frac{1}{5}$、$s_3 = \frac{1}{7}$。令 $p = x + y$ 及 $q = xy$。

冪和的遞推關係

對任意 a, b, x, y 及任意 $k \geq 1$，

$$(x + y)(ax^k + by^k) = ax^{k+1} + by^{k+1} + xy\,(ax^{k-1} + by^{k-1}),$$

因為交叉項是 $axyx^{k-1}$ 和 $bxy\,y^{k-1}$。用我們的記號，即

$$s_{k+1} = p\,s_k - q\,s_{k-1}.$$

這是一條恆等式（identity），所以對方程組的每一個解都成立。

求 $x+y$ 和 xy

取 $k=1$ 和 $k=2$，並代入已知數值：

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{5} &= \tfrac{1}{3}p - q,\\ \tfrac{1}{7} &= \tfrac{1}{5}p - \tfrac{1}{3}q.\end{aligned}$$

由第一式得 $q = \frac{1}{3}p - \frac{1}{5}$。代入第二式，

$$\tfrac{1}{7} = \tfrac{1}{5}p - \tfrac{1}{9}p + \tfrac{1}{15} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{4}{45}p = \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{15} = \tfrac{8}{105} \quad\Longrightarrow\quad p = \tfrac{6}{7},$$

於是 $q = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$。這個線性方程組的行列式（determinant）不為零，所以這些數值是唯一確定的：每一個解都滿足 $x+y=\frac{6}{7}$ 及 $xy=\frac{3}{35}$。

求 x 和 y

因此 x 和 y 是以下方程的兩個根：

$$t^2 - \tfrac{6}{7}t + \tfrac{3}{35} = 0, \qquad \text{即} \qquad 35t^2 - 30t + 3 = 0,$$

由此得

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900-420}}{70} = \frac{30 \pm 4\sqrt{30}}{70} = \frac{15 \pm 2\sqrt{30}}{35}.$$

判別式（discriminant）為正，所以 $x \neq y$，而 $\{x, y\}$ 就是這兩個數，次序可以任選其一。

> ? **想一想** 知道了 x 和 y 之後，能否肯定 a 和 b 也隨之確定？

可以。x 和 y 已知之後，首兩條方程 $a+b=1$ 和 $ax+by=\frac{1}{3}$ 是關於 a 和 b 的線性方程，其行列式為 $y-x$。由於 $x \neq y$，這個行列式不為零，所以恰好有一對 (a,b)。

求 a 和 b

取 $x = \frac{15+2\sqrt{30}}{35}$ 及 $y = \frac{15-2\sqrt{30}}{35}$，則 $x-y = \frac{4\sqrt{30}}{35}$。從 $a+b=1$ 和 $ax+by=\frac{1}{3}$ 消去 b，得 $a(x-y) = \frac{1}{3} - y$。現在

$$\tfrac{1}{3} - y = \frac{35 - 3(15-2\sqrt{30})}{105} = \frac{6\sqrt{30}-10}{105},$$

所以

$$a = \frac{6\sqrt{30}-10}{105} \cdot \frac{35}{4\sqrt{30}} = \frac{6\sqrt{30}-10}{12\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{5}{6\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36},$$

而 $b = 1 - a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$。

這些確實是解

我們至此只證明了任何解都必定是這個樣子，所以仍須驗證它確實成立。按構造方式，$s_0 = 1$ 及 $s_1 = \frac{1}{3}$。由於 p 和 q 滿足上面兩條線性方程，遞推關係給出 $s_2 = ps_1 - qs_0 = \frac{1}{5}$，繼而 $s_3 = ps_2 - qs_1 = \frac{1}{7}$。所以四條方程全部成立。

把 x 和 y 的角色互換，a 和 b 也隨之互換。因此恰好有兩個解：

$$(a, b, x, y) = \left(\frac{18 - \sqrt{30}}{36}, \frac{18 + \sqrt{30}}{36}, \frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}, \frac{15 - 2\sqrt{30}}{35} \right)$$

以及把 $a \leftrightarrow b$ 和 $x \leftrightarrow y$ 同時互換所得的解。在兩個解中，x, y 之中較大者都與較小的係數配對。

驗算

數值上，$x \approx 0.741556$、$y \approx 0.115587$、$a \approx 0.347855$ 及 $b \approx 0.652145$。於是 $ax + by \approx 0.333333$、$ax^2 + by^2 \approx 0.200000$ 及 $ax^3 + by^3 \approx 0.142857$，與 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$ 和 $\frac{1}{7}$ 吻合至機器精度。再作一個簡單的合理性檢查：x 和 y 都在 $(0, 1)$ 之內，而 a 和 b 都是正數。這與右邊各數是 t^{2k} 在 $[0, 1]$ 上的平均值一致（見下文）。

常見錯誤

- 解出了 x 和 y，卻忘記配對是有關係的：a 與 x 相配，所以不能只互換 x 和 y 而不同時互換 a 和 b。
- 找到必要條件（necessary conditions）便停下來。題目說的是「求所有解」，所以既要證明每一個解都是這個形式，也要證明這些數值確實滿足全部四條方程。

STEP 之外

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ 這些數就是 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^{2k}\,\mathrm{d}t$。所以這個方程組其實是在找一條法則 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f \approx \frac{a}{2}\big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\big) + \frac{b}{2}\big(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\big)$，使它對次數不超過 7 的多項式都精確成立。這就是四點高斯—勒讓德求積法（*Gauss–Legendre quadrature*）：它的節點（nodes）是 $\pm\sqrt{x}$ 和 $\pm\sqrt{y}$，而 $a \approx 0.3479$ 和 $b \approx 0.6521$ 就是它著名的權（weights）。像我們這裏所做的那樣，由冪和找出遞推關係，也是信號處理中 Prony 方法（Prony's method）背後的想法。想進一步了解，可參閱 Süli 與 Mayers 的 *An Introduction to Numerical Analysis*（數值分析入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。