詳細解答

STEP II 2008，第 9 題

力學 • 拋體運動

STEP II 2008，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

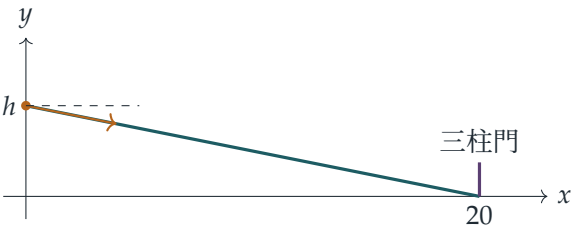
step.maths.org/questions/08-s2-q9

關鍵思路

水平方向的運動決定了以 α 表示的飛行時間（time of flight），把這個時間代入垂直方向的運動，便得到一條連繫 α 與 h 的方程。利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，可把它化為關於 $\tan\alpha$ 的二次方程（quadratic），這是處理「以哪個角度才能擊中目標？」一類問題的標準技巧。之後，憑着對板球的常識選出合適的根，再以小角近似（small-angle approximation）完成餘下的工作。

解答

我們把球看成一個質點（particle），只受重力作用而自由運動，不計空氣阻力，也不計旋轉。取拋射點正下方地面上的一點為原點，x 軸沿水平方向指向三柱門，y 軸垂直向上，於是球從 $(0, h)$ 出發，速率為 $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，方向與水平線成仰角 α（α 為負數表示球是向下投出的）。



第 (i) 部分

水平方向沒有力的作用，所以 $x = 40t\cos\alpha$。球到達 $x = 20$ 的時刻為

$$t = \frac{20}{40\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

垂直方向的加速度為 $-10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，所以

$$y = h + 40t\sin\alpha - 5t^2.$$

此時球位於地面，即 $y = 0$，所以

$$0 = h + 40\sin\alpha\cdot\frac{1}{2\cos\alpha} - \frac{5}{4\cos^2\alpha} = h + 20\tan\alpha - \tfrac{5}{4}\sec^2\alpha.$$

現在利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，並記 $T = \tan\alpha$：

$$h + 20T - \tfrac{5}{4}(1 + T^2) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 5T^2 - 80T + 5 - 4h = 0.$$

由二次公式（quadratic formula），

$$T = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 20(5-4h)}}{10} = \frac{80 \pm \sqrt{6300 + 80h}}{10},$$

所以兩個可能的值是

$$\tan\alpha = 8 \pm \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h}.$$

兩者皆為實數，因為 $h \geq 0$。

想一想 快速投球手實際上會用哪一個根？

由於 $\sqrt{63} \approx 7.9$，較大的根給出 $\tan\alpha \approx 16$，即 $\alpha \approx 86°$：這是一記沖天高吊球，會升高約 80 m，並要大約 8 s 才落到三柱門上。快速投球手不會這樣投球。較小的根，

$$\tan\alpha = 8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h},$$

才是合適的選擇。對於合乎現實的出手高度（約兩米左右），$63 + \frac{4}{5}h$ 接近 64，所以 $\tan\alpha$ 接近 0。例如，只要 h 介乎 0 與 3 之間，便有 $|\tan\alpha| < 0.09$。因此 α 是一個小角，而 $\cos\alpha \approx 1$，球到達三柱門所需的時間為

$$t = \frac{1}{2\cos\alpha} \approx \tfrac{1}{2}\,\mathrm{s},$$

正如題目所求。（事實上 $t = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \tan^2\alpha}$，只要 $|\tan\alpha| < 0.1$，它與 $\frac{1}{2}$ 的差距便不超過 0.5%。）

第 (ii) 部分

球向水平線以下投出，當且僅當 $\tan\alpha < 0$。較大的根恆為正數，所以我們採用較小的根：

$$8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} < 0 \iff \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} > 8 \iff 63 + \tfrac{4}{5}h > 64 \iff h > \tfrac{5}{4},$$

其中平方這一步可逆，因為兩邊皆為正數。所以當 $h > 1.25$ 時，投球手是向水平線以下投出球的。當 $h = 1.25$ 恰好成立時，球沿水平方向投出。

第 (iii) 部分

當 $h = 2.5$ 時，由第 (ii) 部分可知 α 是一個小的負角。取 $\cos\alpha \approx 1$ 和 $\sin\alpha \approx \alpha$（以弧度（radians）計），便有 $\tan\alpha \approx \alpha$ 和 $\sec^2\alpha \approx 1$，所以第 (i) 部分的方程 $0 = h + 20\tan\alpha - \frac{5}{4}\sec^2\alpha$ 變成

$$0 \approx 2.5 + 20\alpha - 1.25, \qquad \text{所以} \qquad \alpha \approx -\frac{1.25}{20} = -0.0625 \text{ rad}.$$

換算成度數，

$$\alpha \approx -0.0625 \times \frac{180}{\pi} \approx -3.58^\circ,$$

所以 $\alpha \approx -3.6^\circ$。球出手時的方向在水平線以下約 3.6°。

另一個看法：利用二項式近似（binomial approximation），$\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = 8 - 8\sqrt{1 + \frac{1}{64}} \approx 8 - 8(1 + \frac{1}{128}) = -\frac{1}{16}$。這給出相同的答案。

驗算

- *精確值*。$\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = -0.06226$，所以 $\alpha = -3.563^\circ$，準確至兩位有效數字是 -3.6°，與近似結果吻合。
- *模擬*。從 $(0, 2.5)$ 出發，以 $40\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ 和 -3.563° 逐步作數值計算，球在 $0.501\,\text{s}$ 後到達 $x = 20$，此時高度為 $0.0000\,\text{m}$。
- *臨界情況*。當 $h = 1.25$ 時，較小的根是 $8 - \sqrt{64} = 0$：球沿水平方向投出，在半秒的飛行中下墜 $5(0.5)^2 = 1.25\,\text{m}$，剛好落在三柱門處。

常見錯誤

- 忘記 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，而試圖分別以 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 求解，結果變得十分繁複。
- 以弧度給出角度，或在度數制下使用小角近似：$\sin\theta \approx \theta$ 只在 θ 以弧度計時才成立。
- 在第 (iii) 部分漏掉負號。正如第 (ii) 部分所預示，這個角是在水平線以下的。

STEP 之外

兩個根的結構反映了一個普遍事實：以固定速率拋出的拋體，可沿兩條軌跡到達其「包絡線」（envelope，即安全拋物線（parabola of safety））以內的任何一點。在包絡線上，兩條軌跡合而為一，而包絡線以外的點則完全無法到達。真實的板球還會受到阻力（drag）以及由旋轉產生的馬格努斯效應（Magnus effect）影響，這會引出非線性微分方程（nonlinear differential equations），通常要用數值方法求解。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）以大學一年級的程度討論拋體運動和有阻力的運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。