詳細解答

STEP II 2008，第 8 題

純數學 • 向量與角平分線

STEP II 2008，第 8 題

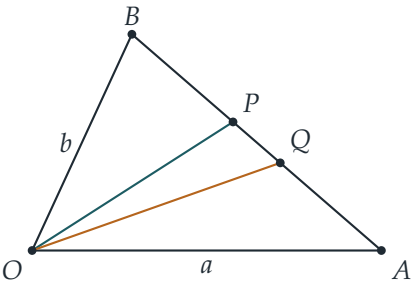
繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/08-s2-q8

關鍵思路

沿 $\angle AOB$ 的角平分線（angle bisector）方向的向量，就是沿 OA 和 OB 的單位向量（unit vector）之和：把兩個長度相等的向量相加，得到的是菱形（rhombus）的對角線，而菱形的對角線平分其頂角。把這個向量與 P 的位置向量（position vector）對照，便可定出 λ。之後，Q 不過是把 A 與 B 的角色互換後的 P，而最後的恆等式只需用純量積（scalar product）直接計算，當中棘手的一項 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 會互相抵銷。

解答



圖中 $a > b$，所以 P（位於角平分線上，以藍綠色標示）較接近 B，而 Q 與 B 的距離，等於 P 與 A 的距離。

P 的位置向量

由於 $AP : PB = (1-\lambda) : \lambda$，而這兩段合起來就是 AB，所以 $AP = (1-\lambda)AB$，因此 $\overrightarrow{AP} = (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a})$，並且

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}.$$

（驗證：$\lambda = 1$ 時得 A，$\lambda = 0$ 時得 B，與該比例相符。）

求 λ

向量 $\mathbf{a}/a$ 和 $\mathbf{b}/b$ 分別是沿 OA 和 OB 的單位向量。兩者之和是一個菱形的對角線，該菱形的邊分別沿 OA 和 OB，所以它指向 $\angle AOB$ 的角平分線方向。由於 P 位於這條角平分線上，

$$\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b} = k\left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b}\right)$$

其中 k 為某個純量。

> **想一想** 為甚麼可以分別比較 **a** 和 **b** 的係數？

因為 O、A、B 不共線（collinear），**a** 和 **b** 均非零向量，而且互不平行，所以 **a** 和 **b** 線性獨立（linearly independent）：若 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$，則 $\alpha = \beta = 0$。因此

$$\lambda = \frac{k}{a}, \qquad 1-\lambda = \frac{k}{b}.$$

兩式相加，得 $1 = k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$，所以 $k = \dfrac{ab}{a+b}$，並且

$$\boxed{\lambda = \frac{b}{a+b}}, \qquad 1-\lambda = \frac{a}{a+b}.$$

這其實就是角平分線定理（angle bisector theorem）的另一種面貌：$AP : PB = (1-\lambda) : \lambda = a : b = OA : OB$。所以

$$\overrightarrow{OP} = \frac{b\,\mathbf{a} + a\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

點 Q 與恆等式

Q 在 AB 上，且 $BQ = AP = (1-\lambda)AB$，所以沿用求 P 時的推論，只是改由 B 而非 A 量起，

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{b} + (1-\lambda)(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \frac{a\,\mathbf{a} + b\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

設 $c = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，並利用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = b^2$。於是

$$(a+b)^2\,OQ^2 = (a\mathbf{a} + b\mathbf{b})\cdot(a\mathbf{a} + b\mathbf{b}) = a^2\cdot a^2 + 2ab\,c + b^2\cdot b^2 = a^4 + b^4 + 2abc,$$
$$(a+b)^2\,OP^2 = (b\mathbf{a} + a\mathbf{b})\cdot(b\mathbf{a} + a\mathbf{b}) = b^2a^2 + 2ab\,c + a^2b^2 = 2a^2b^2 + 2abc.$$

兩式相減，含 c 的項互相抵銷：

$$(a+b)^2\left(OQ^2-OP^2\right)=a^4-2a^2b^2+b^4=(a^2-b^2)^2=(a-b)^2(a+b)^2.$$

兩邊除以 $(a+b)^2\neq 0$，得

$$OQ^2-OP^2=(a-b)^2=(b-a)^2,$$

這正是所求。

驗算

取 $\mathbf{a}=(3,0)$ 和 $\mathbf{b}=(0,4)$，則 $a=3$、$b=4$，而 $\angle AOB$ 是直角。這時 $\lambda=\frac{4}{7}$，$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)$，它位於 $y=x$ 上，即該直角的角平分線。另外 $\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{9}{7},\frac{16}{7}\right)$，所以 $OQ^2-OP^2=\frac{337}{49}-\frac{288}{49}=1=(4-3)^2$。若 $a=b$，三角形是等腰三角形，$P=Q$ 是 AB 的中點，兩者之差為 0，正如所料。以二維和三維空間中 20,000 個隨機三角形作數值測試，所有結果均吻合，誤差在 10^{-13} 以內。

常見錯誤

- 寫成 $\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$：比例中較大的一份 $1-\lambda$ 是與 A 的距離，所以它應該配 $\mathbf{b}$。可用 $\lambda=1$ 檢驗。
- 用 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 作為角平分線的方向。這只在 $a=b$ 時才成立；必須使用單位向量。
- 把 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$ 展開成 a^2+b^2，漏掉了交叉項（cross term）$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。本題中這一項會抵銷，但前提是兩個展開式中都有它。

STEP 之外

最後的計算，其實是長度在線性映射（linear map）下如何變換的一個特例：OP^2 和 OQ^2 是二次型（quadratic form）$\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ 的值，而交叉項則由 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的格拉姆矩陣（Gram matrix）決定。單位向量相加得出角平分線這一事實亦可推廣：在任何內積空間（inner-product space）中，要找出兩個向量「正中間」的方向，做法就是先歸一化（normalise）再相加。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）正是本着這種精神闡述純量積、長度和角度。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。