詳細解答

STEP II 2008，第 7 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP II 2008，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q7

關鍵思路

左邊的 $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 正是 $\ln y$ 的導數（derivative），所以處理這個代換（substitution）的最佳方法是取對數（logarithm）：乘積 $y = u\,(1+x^2)^{1/2}$ 會變成和，而右邊的 $\frac{x}{1+x^2}$ 一項恰好是 $\ln(1+x^2)^{1/2}$ 的導數。這一項消去後，剩下的是一條關於 u 的可分離變數方程（separable equation）。第 (ii) 部分是同一個想法，只是換成立方根；把兩個答案並排一看，第 (iii) 部分的規律便一目了然。

解答

第 (i) 部分

在 $x = 0$ 處有 $y = 1 \neq 0$，而方程中含有 $1/y$，所以我們在 $x = 0$ 附近一個使 $y \neq 0$ 的區間上進行討論。由於 $(1+x^2)^{1/2} > 0$，由代換可知在該區間上亦有 $u \neq 0$，並且 $u(0) = 1$。

對 $|y| = |u|\,(1+x^2)^{1/2}$ 取對數，然後求導，得

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{1+x^2}.$$

與原來的微分方程（differential equation）比較，$\frac{x}{1+x^2}$ 各項互相消去，剩下

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = xy = x\,u\,(1+x^2)^{1/2}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x(1+x^2)^{1/2},$$

這裏兩邊除以 u，由於 $u \neq 0$，這樣做是容許的。

想一想 怎樣才能乾淨利落地求 $x(1+x^2)^{1/2}$ 的積分？

因子 x 是 $1+x^2$ 的導數的一半，所以由逆向鏈式法則（reverse chain rule）得 $\int x(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}$，再加上一個常數。（不妨求導驗證一下。）

兩邊對 x 積分，得

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

當 $x=0$ 時，$u=1$，所以 $-1 = \frac{1}{3}+C$，即 $C=-\frac{4}{3}$。因此

$$\frac{1}{u} = \frac{4-(1+x^2)^{3/2}}{3}, \qquad u = \frac{3}{4-(1+x^2)^{3/2}},$$

於是

$$\boxed{y = \frac{3\,(1+x^2)^{1/2}}{4-(1+x^2)^{3/2}}}$$

這個解在包含 0 而分母為正的區間上成立，亦即 $(1+x^2)^{3/2}<4$，即 $|x|<\sqrt{2^{4/3}-1}\approx 1.233$；當 $|x|$ 趨近這個值時，$y\to\infty$。

第 (ii) 部分

這次多出來的一項是 $\frac{x^2}{1+x^3}$，它是 $\frac{1}{3}\ln(1+x^3) = \ln(1+x^3)^{1/3}$ 的導數。這提示我們設 $y = u\,(1+x^3)^{1/3}$，並在 $x=0$ 附近（該處 $1+x^3>0$）進行討論。與上面完全一樣，

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x^2}{1+x^3},$$

所以方程變成

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2 y = x^2 u\,(1+x^3)^{1/3}, \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2(1+x^3)^{1/3}.$$

這次 x^2 是 $1+x^3$ 的導數的三分之一，所以

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4}(1+x^3)^{4/3} + C = \tfrac{1}{4}(1+x^3)^{4/3} + C.$$

由 $u=1$ 於 $x=0$，得 $-1=\frac{1}{4}+C$，所以 $C=-\frac{5}{4}$。於是 $\frac{1}{u} = \frac{5-(1+x^3)^{4/3}}{4}$，並且

$$\boxed{y = \frac{4\,(1+x^3)^{1/3}}{5-(1+x^3)^{4/3}}}$$

這個解在 0 附近成立，範圍是 $-1<x<\left(5^{3/4}-1\right)^{1/3}\approx 1.33$。

第 (iii) 部分

比較兩個答案：分子出現的是方根 $(1+x^n)^{1/n}$，分母出現的是冪 $(1+x^n)^{(n+1)/n}$，而常數分別是 $n+1$ 和 $n+2$。因此我們猜想（conjecture）

$$\boxed{y=\frac{(n+1)\,(1+x^n)^{1/n}}{n+2-(1+x^n)^{(n+1)/n}}}$$

當 $n=2$ 和 $n=3$ 時，這個式子正好給出 (i) 和 (ii) 的答案。（題目沒有要求證明，但用同樣的代換 $y=u(1+x^n)^{1/n}$ 便可證明：$\int x^{n-1}(1+x^n)^{1/n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}(1+x^n)^{(n+1)/n}$，而 $x=0$ 處的條件給出常數 $-\frac{n+2}{n+1}$。）

驗算

- 當 $x=0$ 時，每條公式都給出 $\frac{n+1}{n+2-1}=1$，符合要求。
- 在 (i) 中 $x=0$ 附近，由方程可得 $y'(0)=0$，而 $(1+x^2)^{1/2}$ 和 $(1+x^2)^{3/2}$ 在 0 處的斜率確實都是零。
- 以數值方法解這些方程（由 $x=0$ 出發，用龍格－庫塔（Runge–Kutta）法逐步計算），所得結果與公式相符，誤差小於 10^{-8}，已對 $n=2,3,4,5,7$ 在多個點上作過檢驗。例如在 (i) 中當 $x=1$ 時，$y=\frac{3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\approx 3.6213$；在 (ii) 中當 $x=1$ 時，$y=\frac{4\cdot 2^{1/3}}{5-2^{4/3}}\approx 2.0320$。

常見錯誤

- 代入 $y=u(1+x^2)^{1/2}$ 後直接用積法則（product rule）求導：這樣做是可行的，但式子很繁瑣。先把全式除以 y（等價於取對數），相消的情況便一目了然。
- 忘記 $\int u^{-2}\,\mathrm{d}u=-u^{-1}$ 中的負號，以致常數出錯。
- 在錯誤的階段確定常數：應在移項整理之前代入 $u(0)=1$（而不是在關於 u 的方程中代入 $y(0)=1$）。

STEP 之外

這條方程是一條伯努利方程（*Bernoulli equation*）：$y'=P(x)y+Q(x)y^2$，通用的技巧是代換 $v=1/y$，把它化為線性（linear）方程。本題所給的代換則分兩步完成同一件事：先用類似積分因子（integrating factor）的 $(1+x^n)^{1/n}$ 消去含 P 的一項，然後分離變數。還要留意，雖然方程看來平平無奇，它的解卻在有限的 x 處趨向無窮；這種「有限時間

爆破（finite-time blow-up）」是含有 y^2 項的方程的典型現象，在常微分方程（ODE）的入門課程中會學到。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教科書）涵蓋了伯努利方程和解的存在性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。