詳細解答

STEP II 2008，第 6 題

純數學 • 和化積公式

> **STEP II 2008，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q6

關鍵思路

一個餘弦與一個正弦相加，而兩者的輻角又不相同，處理起來並不方便；但兩個餘弦之和可以用和化積公式（sum-to-product formula）分解成乘積。先把正弦改寫成餘弦；這樣 f 的零點（zeros）就是兩個簡單因子的零點，而兩個因子同時為零的那一點，正是曲線與軸相切之處。至於最後一部分，要記得餘弦和正弦各自最大只能是 1。

解答

以下一律記

$$A = 2x + \frac{\pi}{3}, \qquad \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos B, \quad \text{其中} B = \frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{2},$$

於是 $f(x) = \cos A + \cos B$。

第 (i) 部分

$\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 這一項的周期（period）是 π，而 $\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4})$ 的周期是 $\frac{2\pi}{3/2} = \frac{4\pi}{3}$。公共周期必須是兩者各自的整數倍：$p\pi = q \cdot \frac{4\pi}{3}$ 即 $3p = 4q$，其最小的正數解是 $p = 4, q = 3$。所以對所有 x 都有 $f(x + 4\pi) = f(x)$，而 f 的周期是

$$4\pi.$$

更小的數都不行：我們會在第 (iii) 部分看到，$f(x) = 2$ 當且僅當 $x = \frac{11\pi}{6} + 4t\pi$（$t$ 為整數），所以 f 取得最大值的各點彼此相隔 4π，任何周期都必定是 4π 的倍數。

第 (ii) 部分

利用 $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$，其中

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{13\pi}{12}\right) = \frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24},$$
$$\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24},$$

我們得到

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24}\right).$$

所以 $f(x) = 0$ 當且僅當兩個餘弦之中有一個為零。

第一個因子。由 $\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 得 $x = -\frac{\pi}{6} + 4k\pi$。落在 $[-\pi, \pi]$ 內的只有 $x = -\frac{\pi}{6}$。

第二個因子。由 $\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 得 $\frac{7x}{4} = \frac{17\pi}{24} + k\pi$，所以

$$x = \frac{(17 + 24k)\pi}{42}.$$

我們需要 $-42 \le 17 + 24k \le 42$，所以 $k = -2, -1, 0, 1$，得出 $x = -\frac{31\pi}{42}$, $-\frac{7\pi}{42} = -\frac{\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{42}$, $\frac{41\pi}{42}$。

綜合起來，f 在 $-\pi \le x \le \pi$ 內的零點是

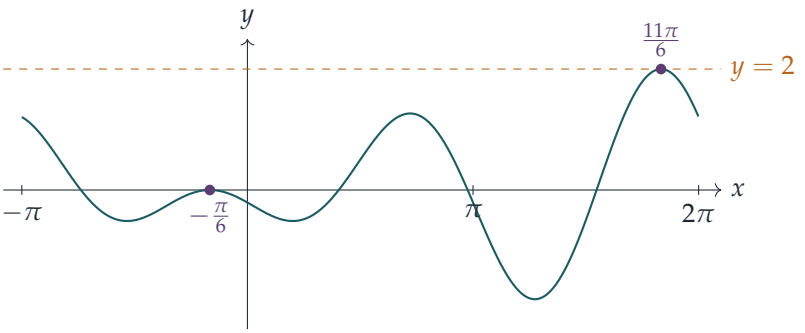
$$x = -\frac{31\pi}{42}, \quad -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{17\pi}{42}, \quad \frac{41\pi}{42}.$$

想一想 為甚麼在兩張清單中都出現的值會與別不同？

在 $x = -\frac{\pi}{6}$ 處，兩個餘弦因子都是零。每個因子都是一個穿過零點的餘弦，所以各自在該處變號（其導數（derivative）不為零，因為在 cos 為 0 之處 sin 是 ± 1）。因此在 $x = -\frac{\pi}{6}$ 附近，f 的表現就像一個常數乘以 $(x + \frac{\pi}{6})^2$：兩次變號相乘，結果是沒有變號。事實上，當 x 遞增經過 $-\frac{\pi}{6}$ 時，第一個因子由正變負（其輻角向上穿過 $\frac{\pi}{2}$），第二個因子由負變正（其輻角向上穿過 $-\frac{\pi}{2}$），所以 f 在兩側都是負數。因此曲線與 x-軸相切而不穿過它之處是

$$x = -\frac{\pi}{6}.$$

在其餘三個零點，只有一個因子為零，所以 f 變號，曲線穿過軸。



第 (iii) 部分

由於 $\cos A \le 1$ 及 $\cos B \le 1$，我們有 $f(x) \le 2$，等號成立當且僅當 $\cos A = 1$ 並且 $\cos B = 1$。以原來的函數表示：

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \iff 2x+\frac{\pi}{3}=2m\pi \iff x=-\frac{\pi}{6}+m\pi,$$
$$\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1 \iff \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2n\pi \iff x=\frac{\pi}{2}+\frac{4n\pi}{3},$$

其中 m, n 為整數。兩者同時成立的條件是 $-\frac{\pi}{6}+m\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{4n\pi}{3}$；兩邊乘以 $\frac{6}{\pi}$，即 $6m-1=3+8n$，也就是

$$3m-4n=2.$$

其中一個解是 $m=2, n=1$，而通解是 $m=2+4t, n=1+3t$（因為 3 與 4 互質 (coprime)）。所以 $f(x)=2$ 當且僅當

$$x=-\frac{\pi}{6}+(2+4t)\pi=\frac{11\pi}{6}+4t\pi, \qquad t\in\mathbb{Z}.$$

在 $0 \le x \le 2\pi$ 內，這樣的值只有

$$x=\frac{11\pi}{6}.$$

驗算：$2\cdot\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=4\pi$，而 $\frac{3}{2}\cdot\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}$，所以 $f=\cos 4\pi+\sin\frac{5\pi}{2}=1+1=2$。

驗算

- 在 10^4 個隨機點上，因式分解後的形式與原來的 f 一致（誤差在 10^{-12} 之內）。
- 以數值方法掃描 $[-\pi,\pi]$，只在 $-\frac{31\pi}{42}$、$\frac{17\pi}{42}$ 和 $\frac{41\pi}{42}$ 附近發現變號；在 $-\frac{\pi}{6}$ 處，我們發現兩側都有 $f(-\frac{\pi}{6}\pm 10^{-3})\approx -8.7\times 10^{-7}$，證實這是一個相切而不變號的零點。
- f 在 $[0,2\pi]$ 上的最大值是 2，在 $x\approx 1.8333\pi=\frac{11\pi}{6}$ 處取得。

常見錯誤

- 把 $-\frac{\pi}{6}$ 列出兩次，或者沒有留意到它同時來自兩個因子，而這恰恰就是找出相切點的線索。
- 分別解出 $\cos A = 1$ 和 $\cos B = 1$ 之後就停下來：兩個條件必須在同一個 x 上成立，這就需要整數方程 $3m - 4n = 2$。

STEP 之外

第 (iii) 部分其實是在問兩個周期運動何時會同步：條件 $3m - 4n = 2$ 是一條線性丟番圖方程（linear Diophantine equation），它有解是因為 $\gcd(3, 4)$ 整除 2。同一個想法若同時應用於多個頻率，就會引向傅立葉級數（Fourier series），以及這個問題：周期函數之和在甚麼情況下本身也是周期函數（只有當各周期之比為有理數時才是）。想了解背後的數論，可以讀 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本數論入門經典）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。