詳細解答

STEP II 2008，第 5 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2008，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/08-s2-q5

關鍵思路

兩個積分(integral)都可以靠看出導數(derivative)來解決。第一個積分中，分子 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 恰好是分母 $1+\sin^2 x$ 的導數，所以一眼就能看出積分結果是一個對數（logarithm）。第二個積分中，分子只有一個 $\sin x$，這提示我們設 $c = \cos x$，並先把分母寫成 $1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$，餘下的就是一個標準的部分分式（partial fractions）積分。於是，比較兩個答案就變成比較兩個含有 $\sqrt{2}$ 的數，而最後一部分的不等式（inequality）正是為了解決這個問題而設計的。

解答

兩個積分

把兩個積分分別記作 I_1（分子為 $\sin 2x$）和 I_2（分子為 $\sin x$）。

先看 I_1。由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\sin^2 x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$，被積函數（integrand）具有 $f'(x)/f(x)$ 的形式，其中 $f(x) = 1+\sin^2 x > 0$。因此

$$I_1 = \Big[\ln(1+\sin^2 x)\Big]_0^{\pi/2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

再看 I_2。寫成 $1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$，並作代換（substitution）$c = \cos x$，於是 $\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$；當 x 由 0 增至 $\frac{1}{2}\pi$ 時，c 由 1 減至 0。負號把積分上下限（limits）對調：

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}c}{2-c^2}.$$

利用部分分式，

$$\frac{1}{2-c^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}-c)(\sqrt{2}+c)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-c} + \frac{1}{\sqrt{2}+c}\right),$$

而當 $0 \le c \le 1$ 時，兩個分母都保持為正，所以

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}+c) - \ln(\sqrt{2}-c)\Big]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

這個結果可以化簡得很漂亮：$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$，所以 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$，因此

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

不等式

根據二項式定理（binomial theorem），並利用 $(\sqrt{2})^2 = 2$、$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$、$(\sqrt{2})^4 = 4$ 和 $(\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$，

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^5 &= 1 + 5\sqrt{2} + 10\cdot 2 + 10\cdot 2\sqrt{2} + 5\cdot 4 + 4\sqrt{2} \\ &= 41 + 29\sqrt{2}.\end{aligned}$$

現在 $\sqrt{2} < 2$（因為 $2 < 4$），所以 $29\sqrt{2} < 58$，從而 $(1+\sqrt{2})^5 < 41 + 58 = 99$，這正是所要證明的。

其次，$1.4^2 = 1.96 < 2$，而 1.4 和 $\sqrt{2}$ 都是正數，平方不改變大小次序，所以 $\sqrt{2} > 1.4$。

想一想 $(1+\sqrt{2})^5 < 99$ 和 $\sqrt{2} > 1.4$ 怎麼可能告訴我們任何關於 $2^{\sqrt{2}}$ 的事情？

寫成 $1.4 = \frac{7}{5}$。那麼 $2^{7/5}$ 就是 $2^7 = 128$ 的五次方根，而 $1+\sqrt{2}$ 的五次方正是我們剛剛估計過上界的量。準確地說：由於 $t \mapsto 2^t$ 是遞增（increasing）函數，而且 $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$，

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5}.$$

另外 $(1+\sqrt{2})^5 < 99 < 128 = (2^{7/5})^5$，而 $y \mapsto y^5$ 在 $y > 0$ 時遞增，取正五次方根便得 $1+\sqrt{2} < 2^{7/5}$。兩者結合，

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5} > 1 + \sqrt{2}.$$

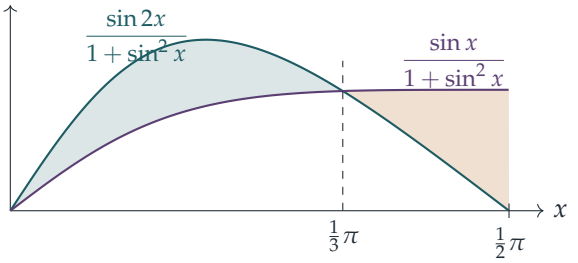
哪個積分較大？

函數 ln 是遞增的，所以由最後一個不等式可得 $\ln(2^{\sqrt{2}}) > \ln(1+\sqrt{2})$，即 $\sqrt{2}\ln 2 > \ln(1+\sqrt{2})$。兩邊除以 $\sqrt{2} > 0$，

$$I_1 = \ln 2 > \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = I_2.$$

所以分子為 $\sin 2x$ 的那個積分較大。

這個大小關係並不能直接從被積函數看出來。由於 $\sin 2x - \sin x = \sin x\,(2\cos x - 1)$，第一個被積函數在 $0 < x < \frac{1}{3}\pi$ 時較大，而在 $\frac{1}{3}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ 時較小：



問題在於青綠色區域的面積是否大於琥珀色區域的面積。答案是肯定的，但只多出約 0.07。這就是為甚麼要對 $\sqrt{2}$ 作一番仔細的運算。

驗算

- 對原來的被積函數使用辛普森法則（Simpson's rule），得 $I_1 \approx 0.693147$ 和 $I_2 \approx 0.623225$，與 $\ln 2$ 和 $\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2}$ 吻合至小數點後十位。
- $(1+\sqrt{2})^5 \approx 82.01$，而 $41 + 29\sqrt{2} \approx 82.01$；遠低於 99。
- $2^{\sqrt{2}} \approx 2.665$、$2^{1.4} \approx 2.639$ 和 $1+\sqrt{2} \approx 2.414$，次序與所斷言的一致。
- 對 I_2 作合理性檢查：被積函數介乎 $\frac{1}{2}\sin x$ 與 $\sin x$ 之間，所以 $\frac{1}{2} < I_2 < 1$，而 0.62 確實在此範圍內。

常見錯誤

- 忘記 $\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$ 會把積分上下限對調，結果為一個正的被積函數算出負值。
- 把 I_2 停留在 $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ 的形式：若沒有看出對數內的分式就是 $(\sqrt{2}+1)^2$，它與最後一部分中 $1+\sqrt{2}$ 的聯繫便隱而不見。
- 單憑計算機就斷言 $2^{\sqrt{2}} > 1+\sqrt{2}$。題目要求的是經由 $2^{7/5}$ 的那一串不等式，並須說明 2^t 和 y^5 的單調性（monotonicity）。

STEP 之外

$2^{\sqrt{2}}$ 究竟是甚麼意思？在大學裏，它被定義為 $e^{\sqrt{2}\ln 2}$，而我們用過的那個事實，即 2^t 不論 t 是有理數還是無理數都隨 t 遞增，是由指數函數（exponential function）的性質推出的，這些性質會在大學的第一門分析課中嚴格證明。（蓋爾范德（Gelfond）與施奈德（Schneider）的一條著名定理表明，$2^{\sqrt{2}}$ 其實是超越數（transcendental number）。）至於 e^x 和 $\ln x$ 的嚴格構造，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。