詳細解答

STEP II 2008，第 4 題

純數學 • 隱函數微分法

> **STEP II 2008，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q4

關鍵思路

處理兩條直線之間的夾角，用向量（vector）最為方便：$F(x,y) = 1$ 的法線（normal）沿 ∇F 的方向，而對於平面上兩個向量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{n}$，兩者夾角的 tan 等於 |叉積| 除以點積（dot product）。在這一題，點積原來恰好是曲線方程的左方，即 1。之後，θ 取駐值（stationary value）當且僅當 $y^2 - x^2$ 取駐值，餘下的就是關於 $x^2 + y^2$ 和 xy 的代數運算。

解答

斜率

把 $x^2 + y^2 + 2axy = 1$ 對 x 作隱函數微分（implicit differentiation），

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2a\left(y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (ax + y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -(x + ay).$$

因此，只要 $ax + y \neq 0$，斜率（gradient）就是 $-\dfrac{x + ay}{ax + y}$，正如題目所求。

角 θ

切線（tangent）的方向為 $(ax + y,\ -(x + ay))$，所以法線的方向為

$$\mathbf{n} = (x + ay,\ ax + y),$$

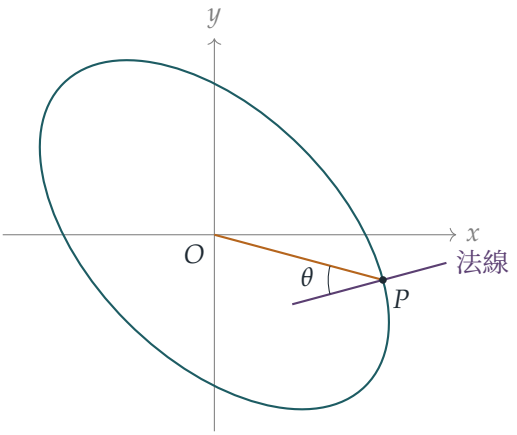
即與它垂直的向量。（這就是 $F = x^2 + y^2 + 2axy$ 的 $\frac{1}{2}\nabla F$，即使在 $ax + y = 0$ 的地方也有意義。）向量 $\overrightarrow{OP}$ 是 $\mathbf{p} = (x, y)$。設 ϕ 為 $\mathbf{p}$ 與 $\mathbf{n}$ 之間的夾角，則

$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\cos\phi = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = x(x+ay) + y(ax+y) = x^2 + y^2 + 2axy = 1,$$
$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\sin\phi = |x(ax+y) - y(x+ay)| = |ax^2 - ay^2| = a|y^2 - x^2|,$$

其中第二行是二維叉積（cross product）的大小（即由 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{n}$ 所張成的平行四邊形的面積），而 $a > 0$。

由於點積為 $+1 > 0$，ϕ 本身已是銳角（或零），所以 $\phi = \theta$。把兩行相除，得

$$\tan\theta = a\,|y^2 - x^2|.$$



上面的草圖（取 $a = \frac{1}{2}$）顯示了這條曲線：由於 $0 < a < 1$，它是一個橢圓（ellipse），兩軸分別沿 $y = \pm x$。圖中所畫的點 P 是 θ 最大的其中一點。

第 (i) 部分

函數 $t \mapsto \arctan(t)$ 嚴格遞增（strictly increasing），所以凡在 $f \neq 0$ 之處，θ 都是 $f = y^2 - x^2$ 的光滑遞增函數。

> **想一想** 在 $y^2 = x^2$ 的點，絕對值（modulus）出現尖角，那又如何？

在這些點 $\theta = 0$。假如 θ 在這樣的一點導數（derivative）為零，那麼 $a|f|$ 除以 x 的改變量會趨向 0，這迫使 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = 0$ 同樣成立。所以在任何情況下都有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 - x^2) = 0 \implies y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x.$$

這裏我們用到斜率公式，所以需要 $ax + y \neq 0$（下文會確認這個條件必然成立）。代入後再乘以 $ax + y$：

$$-y(x+ay) = x(ax+y) \implies -xy - ay^2 = ax^2 + xy \implies a(x^2 + y^2) + 2xy = 0.$$

這就是 (i)。

順帶一提，假如 $ax+y=0$，則由 (i) 會得出 $ax^2(1+a^2)-2ax^2=-a(1-a^2)x^2=0$，於是 $x=y=0$，但這一點不在曲線上。所以這類點永遠不會造成麻煩。

第 (ii) 部分

記 $S=x^2+y^2$。由 (i)，$2xy=-aS$。把它代入曲線方程，

$$S+a(-aS)=1 \quad\Longrightarrow\quad S=\frac{1}{1-a^2}.$$

因此

$$x^2+y^2+2xy=S-aS=\frac{1-a}{1-a^2}=\frac{1}{1+a},$$

即 $(1+a)(x^2+y^2+2xy)=1$，正如題目所求。

第 (iii) 部分

我們需要求 $|y^2-x^2|$。利用 $(y^2-x^2)^2=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=S^2-(2xy)^2$，

$$(y^2-x^2)^2=S^2-a^2S^2=(1-a^2)\cdot\frac{1}{(1-a^2)^2}=\frac{1}{1-a^2}.$$

取正平方根（因 $0<a<1$，此舉成立），得 $|y^2-x^2|=1/\sqrt{1-a^2}$，所以

$$\tan\theta=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

驗算

- 旋轉坐標軸：設 $u=(x+y)/\sqrt{2}$ 及 $v=(x-y)/\sqrt{2}$，曲線便化為 $(1+a)u^2+(1-a)v^2=1$，而 $y^2-x^2=-2uv$。由算術平均—幾何平均不等式（AM–GM），$1\geq 2\sqrt{(1-a^2)}\,|uv|$，所以 $\tan\theta=2a|uv|\leq a/\sqrt{1-a^2}$，等號在 $(1+a)u^2=\frac{1}{2}$ 時成立。由於 $x^2+y^2+2xy=2u^2$，這個等號條件正正就是 (ii)。所以該駐值是 θ 的最大值。
- 取 $a=\frac{1}{2}$：$P\approx(1.1154,\,-0.2989)$ 滿足曲線方程和 (i)，而 $\tan\theta=\frac{1}{2}|y^2-x^2|\approx 0.5774=1/\sqrt{3}$，所以 $\theta=30°$。對若干個 a 值，沿橢圓一周以數值方法掃描 $\tan\theta$，所得的最大值正是這些數值。
- 當 $a\to 0$ 時，曲線變成單位圓，其法線通過 O，所以 $\theta\to 0$，與 $\tan\theta\to 0$ 吻合。

常見錯誤

- 以 OP 和法線的斜率套用 $\tan(\alpha-\beta)$：這方法行得通，但要小心處理 $x=0$ 的情況和正負號，而向量的做法可同時避開這兩個問題。

- 忘記了為何所求得的角是銳角：關鍵在於點積為 $+1$。
- 以平方求 $|y^2 - x^2|$，其後卻忘記取正根。

STEP 之外

把 $x^2 + y^2 + 2axy$ 寫成二次型（quadratic form）$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A\mathbf{x}$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$，則橢圓的兩軸就是 A 的特徵向量（eigenvector）$(1,1)$ 和 $(1,-1)$，而特徵值（eigenvalue）$1 \pm a$ 決定了半軸的長度。對稱矩陣（symmetric matrix）的這種對角化（diagonalisation）是大學一年級線性代數的核心概念；參看 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。