詳細解答

STEP II 2008，第 3 題

純數學 • 不等式與反證法

STEP II 2008，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/08-s2-q3

關鍵思路

從草圖可見，當 $x \geq 0$ 時，這條三次曲線（cubic）永遠不會跌到 x 軸之下；把「$y \geq 0$」重新整理，便得到不等式 $x^2(1-x) \leq 4/27$。至於反證法（proof by contradiction）的部分，留意 $bc(1-a)$、$ca(1-b)$、$ab(1-c)$ 這三個數逐個來看都不好處理，但它們的乘積可以重新組合成 $a^2(1-a)\cdot b^2(1-b)\cdot c^2(1-c)$，而這正好受第一個結果控制。第 (ii) 部分用的是同一個技巧，只是把三次式換成二次式（quadratic）。

解答

第 (i) 部分：曲線

對 $y = 27x^3 - 27x^2 + 4$ 求導，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 81x^2 - 54x = 27x(3x-2),$$

它在 $x = 0$ 和 $x = \frac{2}{3}$ 時為零。當 $x = 0$ 時，$y = 4$；當 $x = \frac{2}{3}$ 時，

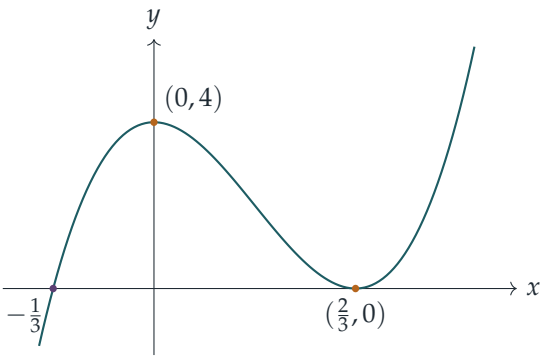
$$y = 27\cdot\tfrac{8}{27} - 27\cdot\tfrac{4}{9} + 4 = 8 - 12 + 4 = 0.$$

由於 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 162x - 54$ 在 $x = 0$ 時為 $-54 < 0$，在 $x = \frac{2}{3}$ 時為 $54 > 0$，所以轉向點（turning point）是極大點（maximum）$(0, 4)$ 和極小點（minimum）$(\frac{2}{3}, 0)$。

極小點位於 x 軸上，所以曲線在該處與橫軸相切，而 $(3x-2)^2$ 是一個因式（factor）。比較 x^3 的係數和常數項，得

$$27x^3 - 27x^2 + 4 = (3x-2)^2(3x+1),$$

所以曲線與橫軸相交的另一處只有 $x = -\frac{1}{3}$。曲線從 $-\infty$ 上升，在 $x = -\frac{1}{3}$ 穿過橫軸，在 $(0,4)$ 達到頂點，然後下降至 $(\frac{2}{3},0)$ 與橫軸相切，之後再度上升。



第 (i) 部分：不等式

當 $x \geq 0$ 時，我們有 $3x+1 > 0$ 和 $(3x-2)^2 \geq 0$，所以由因式分解（factorisation）可得 $27x^3 - 27x^2 + 4 \geq 0$。（從草圖看也是一樣：在 $x \geq 0$ 的範圍內，曲線的最低點就是極小點 $(\frac{2}{3},0)$。）重新整理，

$$4 \geq 27x^2 - 27x^3 = 27x^2(1-x), \qquad \text{所以} \qquad x^2(1-x) \leq \frac{4}{27} \quad \text{對所有} x \geq 0,$$

而等號只在 $x = \frac{2}{3}$ 時成立。這就是所要求的結果。

第 (i) 部分：反證

用反證法，假設三個數全都大於 4/27：

$$bc(1-a) > \tfrac{4}{27}, \qquad ca(1-b) > \tfrac{4}{27}, \qquad ab(1-c) > \tfrac{4}{27}.$$

這裏六個量全是正數，所以我們可以把三條不等式相乘：

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) > \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

? **想一想** 第一個結果怎樣才能對這些混合的乘積有所說明？

把左邊重新組合，讓每個字母與它自己的括號歸在一起：

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) = [a^2(1-a)][b^2(1-b)][c^2(1-c)].$$

a, b, c 每個都是非負數，所以根據第一個結果，每個方括號的值都介乎 0（因為 $1-a \geq 0$，其餘類推）與 4/27 之間。把這三條非負數之間的不等式相乘，

$$[a^2(1-a)][b^2(1-b)][c^2(1-c)] \leq \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

這與上面的嚴格不等式矛盾。所以我們的假設不成立，即 $bc(1-a)$、$ca(1-b)$、$ab(1-c)$ 之中至少有一個小於或等於 $4/27$。

第 (ii) 部分

同一個想法對二次式也行得通。對任意實數 t，

$$t(1-t) = \tfrac{1}{4} - (t-\tfrac{1}{2})^2 \leq \tfrac{1}{4},$$

這可由配方法(completing the square)得出。用反證法，假設 $p(1-q) > \frac{1}{4}$ 及 $q(1-p) > \frac{1}{4}$。兩邊都是正數，所以相乘可得

$$p(1-q)\cdot q(1-p) > \tfrac{1}{16}.$$

但左邊可以重新組合成 $[p(1-p)][q(1-q)]$，而由於 $0 < p, q < 1$，每個方括號的值都介乎 0 與 $\frac{1}{4}$ 之間，所以乘積至多為 $\frac{1}{16}$。這是矛盾的，所以 $p(1-q)$ 和 $q(1-p)$ 之中至少有一個小於或等於 $\frac{1}{4}$。

驗算

- 等號成立的情況：$a = b = c = \frac{2}{3}$ 使 (i) 中的三個數全都等於 $\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$，而 $p = q = \frac{1}{2}$ 使 (ii) 中的兩個數都等於 $\frac{1}{4}$。所以 $4/27$ 和 $1/4$ 這兩個界不能再改進。
- 展開 $(3x-2)^2(3x+1) = (9x^2-12x+4)(3x+1) = 27x^3 - 27x^2 + 4$，確認因式分解無誤。
- 以數值計算，$x^2(1-x)$ 在 $[0,3]$ 上的最大值是 $0.148148\ldots = 4/27$。在 $(0,1)$ 內隨機抽取一百萬組三元組 (a,b,c)，三個乘積中最小的一個從未超過 0.1468；隨機抽取一百萬對數值，$p(1-q)$、$q(1-p)$ 中較小的一個從未超過 0.24998。

常見錯誤

- 把不等式相乘，卻沒有說明所有量都是正數。「$A > \alpha$、$B > \beta$ 蘊含 $AB > \alpha\beta$」這一步對負數並不成立，所以 $0 < a, b, c < 1$ 這個假設確實是必需的。
- 在 $x < 0$ 時使用 $x^2(1-x) \leq 4/27$ 這個界，但它在該範圍並不成立（試試 $x = -1$）。
- 只證明某一個特定的數（例如 $bc(1-a)$）很小。它不一定小：當 a 接近 0 而 $b = c$ 接近 1 時，它接近 1。

STEP 之外

把若干個量相乘，使一個對稱的界得以派上用場，這種做法與算術—幾何平均不等式（AM–GM inequality）十分相近，而後者可以直接給出第一個結果：對 $0 \le x \le 1$，把算術—幾何平均不等式應用於 $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 1-x$（三者之和為 1），便得 $\frac{x^2}{4}(1-x) \le \left(\frac{1}{3}\right)^3$。這個論證也帶有鴿巢原理（pigeonhole principle）的味道：如果乘積很小，就不可能每個因子都很大。這些關於估界和求最優值的想法，會在大學一年級的分析（analysis）課程中進一步發展；Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門讀物）是個平易近人的起點，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）則有更多這類風格的 STEP 題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。