詳細解答

STEP II 2008，第 2 題

純數學 • 部分分式與級數

> **STEP II 2008，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q2

關鍵思路

部分分式（partial fractions）把一個難以處理的有理函數（rational function）拆成三項，而這三項的展開式我們都爛熟於心：一個等比級數（geometric series）、它的導數，以及一個以 $-x^2$ 為公比的等比級數。頭兩項給出的係數大致隨 n 增長；第三項的貢獻永遠只是 $\pm\frac{1}{2}$，並以週期 4 重複，題目中「非此即彼」的兩種情況正是由此而來。至於最後一部分，要找一個 x 的值，使函數變成題目所給的分數。

解答

部分分式

由於 $(1-x)^2$ 是重複的一次因式，而 $1+x^2$ 是不可約二次式（irreducible quadratic），我們設

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2},$$

於是對所有 x，

$$1+x = A(1-x)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(1-x)^2.$$

- 代入 $x=1$：$2 = 2B$，所以 $B=1$。
- 代入 $x=0$：$1 = A+B+D$，所以 $A=-D$。
- 代入 $x=\mathrm{i}$（這是容許的，因為這是一個多項式恆等式）：$1+\mathrm{i} = (C\mathrm{i}+D)(1-\mathrm{i})^2 = (C\mathrm{i}+D)(-2\mathrm{i}) = 2C-2D\mathrm{i}$。比較實部和虛部，得 $C=\frac{1}{2}$ 和 $D=-\frac{1}{2}$，因此 $A=\frac{1}{2}$。

作為驗算，右邊 x^3 的係數是 $-A+C=0$，與左邊相符。所以

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1-x}{2(1+x^2)}.$$

係數

當 $|x|<1$ 時，三個展開式全部收斂（converge），而且

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(1-x)} &= \tfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n,\\
-\frac{1-x}{2(1+x^2)} &= -\tfrac{1}{2}(1-x)\left(1-x^2+x^4-x^6+\cdots\right)\\
&= -\tfrac{1}{2}\left(1-x-x^2+x^3+x^4-x^5-x^6+x^7+\cdots\right).
\end{aligned}$$

最後一行括號內的係數是 $1,-1,-1,1$，以週期 4 重複：當 $n=2k$ 時，x^n 的係數是 $(-1)^k$；當 $n=2k+1$ 時，則是 $-(-1)^k$。所以，當 $n\equiv 0$ 或 $3 \pmod 4$ 時，第三項對 x^n 的貢獻是 $-\frac{1}{2}$；當 $n\equiv 1$ 或 $2 \pmod 4$ 時，貢獻是 $+\frac{1}{2}$。

> ? **想一想** 為甚麼週期為 4 的規律只產生兩種情況，而不是四種？

因為只有正負號才有影響：把三項的貢獻相加，

$$a_n = \tfrac{1}{2} + (n+1) \mp \tfrac{1}{2} = \begin{cases} n+1, & n\equiv 0 \text{或} 3 \pmod 4,\\ n+2, & n\equiv 1 \text{或} 2 \pmod 4, \end{cases}$$

這就是所要求的結果。這個數列的首幾項是 $1,3,4,4,5,7,8,8,9,11,12,12,\ldots$

小數近似值

> ? **想一想** x 取甚麼值時，函數會等於 $\frac{11\,000}{8181}$？

從分母可以猜到 $x=\frac{1}{10}$：這時 $(1-x)^2=0.81$ 而 $1+x^2=1.01$，所以 $(1-x)^2(1+x^2)=0.8181$，並且

$$\frac{1+\frac{1}{10}}{0.8181} = \frac{1.1}{0.8181} = \frac{11\,000}{8181}.$$

由於 $\frac{1}{10}<1$，級數展開成立，而且

$$\frac{11\,000}{8181} = \sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{10^n} = 1+0.3+0.04+0.004+0.0005+0.00007+\cdots.$$

只要 $a_n\leq 9$（即直至 $n=8$ 為止），各係數就正好是小數的各個數字：1.34457889。此後

的係數都是兩位數，所以必須進位：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{8}\frac{a_n}{10^n} &= 1.344\,578\,89\\ +11\times10^{-9} &\to 1.344\,578\,901\\ +12\times10^{-10} &\to 1.344\,578\,902\,2\\ +12\times10^{-11} &\to 1.344\,578\,902\,32\\ +13\times10^{-12} &\to 1.344\,578\,902\,333.\end{aligned}$$

其後各項只會影響第十一位有效數字（significant figure）及以後的數字，所以準確至九位有效數字，

$$\frac{11\,000}{8181}\approx 1.344\,578\,90.$$

驗算

- 在函數中代入 $x=0$ 得 $1=a_0$，而 $n=0$ 屬於 $n+1$ 的情況。把 $(1+x)(1+2x+\cdots)(1-x^2+\cdots)$ 乘開，得 $1+3x+\cdots$，所以 $a_1=3=1+2$。
- 用長除法（long division）得 $11\,000/8181=1.344\,578\,902\,33\ldots$，與級數的結果一致。我們亦以精確的冪級數（power series）除法核對了 $n<60$ 的 a_n，並在多個隨機選取的有理點上核對了部分分式恆等式。

常見錯誤

- 忘記進位：直接把 a_n 當作各位數字讀出，會得到 $1.34457889\ldots$，第九位有效數字就錯了。
- 把 $\frac{Cx+D}{1+x^2}$ 寫成 $\frac{D}{1+x^2}$；不可約二次式的分子必須是一次式。
- 把 $1.344578902\ldots$ 捨入為 1.34457890 之後，卻略去末尾的零；這個零在這裏是一位有效數字。

STEP 之外

有理函數必定有冪級數展開式，其係數是 n 的多項式，再加上形如 r^n 的項和週期性的規律，分母的每個根各對應一項；這就是線性遞推關係（linear recurrences）和生成函數（generating functions）的理論。在這一題，根 1（二重根）和 $\pm\mathrm{i}$ 分別帶來線性增長和週期為 4 的起伏。這也解釋了為甚麼每個分數的小數展開最終都會循環。Wilf 的

generatingfunctionology 是一本生動有趣、可免費取得的入門書，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多同類風格的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。