詳細解答

STEP II 2008，第 12 題

概率與統計 • 獨立事件

> **STEP II 2008，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q12

關鍵思路

一個計數的期望值（expectation），等於構成它的各個事件的概率之和，所以第一部分只是一條關於 p 的二次方程。至於第二部分，法官們在心中擲硬幣時根本沒有看被告一眼，所以國王的宣判與真相獨立（independent）。把宣判正確的概率用 t 表示，再圍繞 $\frac{1}{2}$ 重新整理，答案一行便出來。

解答

求 p

設 A、B、C 分別為驢子、河狸和半人馬裁定有罪的事件，並設 I_A、I_B、I_C 為它們的指示變量（indicator variable）（事件發生時等於 1，否則等於 0）。那麼 $X = I_A + I_B + I_C$，而由於 $\mathrm{E}(I_A) = \mathrm{P}(A)$，其餘類推，由期望值的線性性質（linearity of expectation）可得

$$\mathrm{E}(X) = p + \frac{p}{3} + p^2.$$

（線性性質並不需要獨立性；我們稍後才會用到獨立性。）令上式等於 $\frac{4}{3}$，再乘以 3：

$$3p^2 + 4p - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (3p - 2)(p + 2) = 0.$$

概率不可能是負數，所以 $p + 2 \neq 0$，因此

$$p = \frac{2}{3}.$$

於是三位法官說「有罪」的概率分別為

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}, \qquad \mathrm{P}(B) = \frac{2}{9}, \qquad \mathrm{P}(C) = \frac{4}{9},$$

全部都在 $[0, 1]$ 之內，正如所應有的。

國王說「有罪」的概率

設 K 為最少兩位法官裁定有罪的事件，即 K 是國王宣判被告有罪的事件。把上面三個概率記作 a、b、c。恰好兩個有罪裁決有三種情況，三個全是有罪則有一種情況；利用法官之間的獨立性，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K) &= ab(1-c) + ac(1-b) + bc(1-a) + abc \\ &= ab + ac + bc - 2abc.\end{aligned}$$

這裏 $ab = \frac{4}{27}$，$ac = \frac{8}{27}$，$bc = \frac{8}{81}$，$abc = \frac{16}{243}$，所以

$$\mathrm{P}(K) = \frac{36}{243} + \frac{72}{243} + \frac{24}{243} - \frac{32}{243} = \frac{100}{243}.$$

為簡便起見，把它記作 g。

求 t

設 D 為被告確實有罪的事件，所以 $\mathrm{P}(D) = t$。當 D 與 K 同時發生，或兩者皆不發生時，國王的宣判便是正確的。

> ? **想一想** 為甚麼我們可以把 $\mathrm{P}(D)$ 乘以 $\mathrm{P}(K)$？

法官們的決定是「完全隨機」的：他們的裁決並不取決於證據，所以 K 與 D 獨立。因此

$$\mathrm{P}(\text{正確}) = \mathrm{P}(D)\,\mathrm{P}(K) + \mathrm{P}(D')\,\mathrm{P}(K') = tg + (1-t)(1-g).$$

現在減去 $\frac{1}{2}$ 並因式分解（factorise）：

$$\begin{aligned}tg + (1-t)(1-g) - \tfrac{1}{2} &= 2tg - t - g + \tfrac{1}{2} \\ &= (2t-1)(g - \tfrac{1}{2}).\end{aligned}$$

所以國王宣判正確的概率為 $\frac{1}{2}$，當且僅當 $(2t-1)(g-\frac{1}{2}) = 0$。由於 $g = \frac{100}{243} \neq \frac{1}{2}$，第二個因式不等於零，故必有

$$t = \frac{1}{2}.$$

不用因式分解也可以得到同樣的結果：由 $\frac{100}{243}t + \frac{143}{243}(1-t) = \frac{1}{2}$ 得 $143 - 43t = \frac{243}{2}$，所以 $43t = \frac{43}{2}$，即 $t = \frac{1}{2}$。

留意 p 的值在這裏幾乎無關重要：不論法官們的概率是多少，只要 $\mathrm{P}(K) \neq \frac{1}{2}$，一個無視證據的法庭有一半機會判對，當且僅當有罪與無辜的被告同樣常見。

驗算

► 取 $p = \frac{2}{3}$：$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$，符合要求。

- 用分數精確地列舉全部八種裁決組合，得 $\mathrm{P}(K) = \frac{100}{243} \approx 0.412$ 及 $\mathrm{E}(X) = \frac{4}{3}$。
- 取 $t = \frac{1}{2}$ 進行 200 000 次模擬試驗，國王宣判正確的個案所佔比例為 0.5007。
- 檢查公式是否合理：若 $t = 1$（人人有罪），國王判對的概率為 g；若 $t = 0$，則為 $1 - g$；這個概率是 t 的線性函數，所以它在中點處經過 $\frac{1}{2}$。

常見錯誤

- 把「最少兩個」當作 $ab + ac + bc$。這樣會把三個全中的情況數了三次；正確的表達式要減去 $2abc$（或者直接把四個互斥的情況相加）。
- 忘記捨去 $p = -2$，或者沒有檢查 p^2 和 $p/3$ 是否有效的概率。
- 把「國王宣判正確」只當作 $\mathrm{P}(K)$，忘記了那些獲正確判定無罪的無辜被告。

STEP 之外

第一部分是一個強大技巧的小例子：把一個計數寫成指示變量之和，於是它的期望值就只是概率之和，即使各事件並不獨立亦然。大學本科的概率論經常使用這個技巧，例如用來求隨機排列（random permutation）的不動點（fixed point）的期望數目。第二部分講的是一個輸出與真相獨立的分類器（classifier），這正是思考檢測中的靈敏度（sensitivity）、特異度（specificity）和貝葉斯定理（Bayes' theorem）的起點。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門）大量運用指示變量，是很好的下一步讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。