詳細解答

STEP II 2008，第 11 題

力學 • 移動楔上的質點

STEP II 2008，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

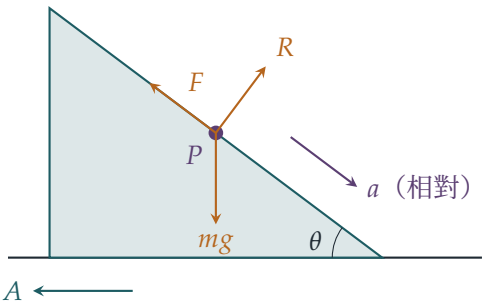
step.maths.org/questions/08-s2-q11

關鍵思路

系統以外沒有任何東西沿水平方向施力（地面是光滑的），所以質點（particle）與楔塊（wedge）的水平動量（momentum）一直保持為零；楔塊的加速度幾乎不費工夫就得到了。其餘一切，都來自把質點的眞實加速度寫成「它相對於楔塊的加速度，加上楔塊的加速度」，然後沿斜面方向和垂直於斜面方向分解（resolve）質點所受的力。靜止的觀察者所見的路徑，是一條沿真實加速度方向的直線，因為一切都由靜止開始，而且各加速度都是常數。

解答

我們把 P 視為質點，把楔塊視為剛體（rigid body）。地面光滑；斜面粗糙，摩擦系數（coefficient of friction）為 μ。把鉛垂面放在左邊，於是斜面向右下方傾斜。當 P 向右下方滑動時，楔塊被推向左方。設楔塊的加速度為向左的 A，並設 P 相對於楔塊沿斜面向下的加速度為 a。設 R 為法向反作用力（normal reaction），F 為作用於 P 的摩擦力（friction）；當 P 向下滑動時，摩擦力沿斜面向上。



取 x 軸向右、y 軸向上。沿斜面向下的單位向量（unit vector）是 $(\cos\theta, -\sin\theta)$，所以 P 的真實加速度是

$$(a\cos\theta - A,\ -a\sin\theta).$$

第 (i) 部分：楔塊的加速度

作用於「P 加楔塊」這個系統的外力，只有重力和光滑地面的法向反作用力，兩者都是鉛垂的。所以總水平動量是常數，而由於一切都由靜止開始，這個常數是零。因此 $m\times$（加速度）的水平分量之和為零：

$$m(a\cos\theta - A) + km(-A) = 0 \quad\Longrightarrow\quad A = \frac{a\cos\theta}{k+1},$$

這正是所要求的結果。（P 與楔塊之間的力 R 和 F 是內力，根據牛頓第三定律（Newton's third law）互相抵消。）

第 (i) 部分：45° 路徑

想一想 為甚麼觀察到的路徑必定是一條沿真實加速度方向的直線？

下文的運動方程（equations of motion）確定了 a 和 A 都是常數，所以 P 的真實加速度是一個常向量。由靜止開始，它的速度總是該向量的 t 倍，位移則是該向量的 $\frac{1}{2}t^2$ 倍，所以它沿着該方向的一條固定直線運動。

P 的加速度的水平分量是

$$a\cos\theta - \frac{a\cos\theta}{k+1} = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta,$$

而鉛垂分量的大小是 $a\sin\theta$。路徑是一條 45° 的直線，即表示這兩者相等：

$$a\sin\theta = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \tan\theta = \frac{k}{k+1},$$

其中兩邊除以了 $a\cos\theta \neq 0$（因為 P 確實在滑動，$a > 0$）。這正是所要求的結果。

第 (i) 部分：$k = 3$ 的情況

現在 $\tan\theta = \frac{3}{4}$，所以 $\sin\theta = \frac{3}{5}$，$\cos\theta = \frac{4}{5}$，而 $A = \frac{a\cdot 4/5}{4} = \frac{a}{5}$。

我們對 P 分解各力。它的真實加速度沿斜面向下的分量是 $a - A\cos\theta$，沿向外法線方向的分量是 $-A\sin\theta$（楔塊向左的加速度有這兩個分量；相對加速度則完全沿着斜面）。

垂直於斜面方向：

$$R - mg\cos\theta = -mA\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R = m\left(\tfrac{4}{5}g - \tfrac{3}{25}a\right).$$

留意 R 比 $mg\cos\theta$ 小：楔塊正在離 P 而去。

沿斜面向下方向，由於 P 正在滑動，所以 $F = \mu R$：

$$mg\sin\theta - \mu R = m(a - A\cos\theta) = m\left(a - \tfrac{4}{25}a\right) = \tfrac{21}{25}ma.$$

代入 R 並乘以 $25/m$：

$$15g - 20\mu g + 3\mu a = 21a \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{5g(3-4\mu)}{3(7-\mu)}.$$

這個值恰好在 $\mu < \frac{3}{4} = \tan\theta$ 時為正，而 P 要滑動就必須如此；這正好帶我們進入第 (ii) 部分。

第 (ii) 部分

我們斷言：若 $\tan\theta \le \mu$，則 P 留在原處，楔塊也不會移動。

靜止是可能的。若兩個物體都不動，則對 P 而言，我們需要 $R = mg\cos\theta$，以及沿斜面向上的摩擦力 $F = mg\sin\theta$。只要 $F \le \mu R$，即 $\sin\theta \le \mu\cos\theta$，亦即 $\tan\theta \le \mu$，粗糙的接觸面就能提供這個力，而這正是我們的條件。楔塊所受的則是方向相反的 R 和 F；它們的水平分量分別是向左的 $R\sin\theta = mg\sin\theta\cos\theta$ 和向右的 $F\cos\theta = mg\sin\theta\cos\theta$，兩者互相抵消。所以楔塊也處於平衡（equilibrium），而地面只提供一個鉛垂的力。

想一想 即使靜止是可能的，P 會不會仍然滑動？

滑動是不可能的。假設 P 確實向下滑動，且 $F = \mu R$，其中 k 和 θ 為一般的值。設 $s = \sin\theta - \mu\cos\theta$。楔塊的水平方程是 $kmA = R\sin\theta - \mu R\cos\theta = Rs$。把它與法向方程 $R = m(g\cos\theta - A\sin\theta)$ 結合，得

$$R = \frac{kmg\cos\theta}{k + s\sin\theta}, \qquad a = \frac{(k+1)\,gs}{k + s\sin\theta}.$$

要保持接觸，我們需要 $R > 0$，這迫使 $k + s\sin\theta > 0$；於是 a 與 s 同號。但 $\tan\theta \le \mu$ 表示 $s \le 0$，所以 $a \le 0$，這與向下滑動矛盾。也沒有任何東西能使 P 沿斜面向上滑動，因為只有重力才能引起相對運動，而重力的分量是沿斜面向下的。所以當 $\tan\theta \le \mu$ 時，P 在楔塊上保持靜止，楔塊也在地面上保持靜止。（當 $\tan\theta = \mu$ 時，摩擦力達到極限值（limiting friction），但 P 仍然不動。）

驗算

- 取 $\mu = 0$ 和 $k = 3$，我們得到 $a = \frac{5g}{7}$ 和 $A = \frac{g}{7}$。於是 P 的真實加速度的水平分量是 $\frac{4}{5}\cdot\frac{5g}{7} - \frac{g}{7} = \frac{3g}{7}$，鉛垂分量是 $\frac{3}{5}\cdot\frac{5g}{7} = \frac{3g}{7}$，方向確實是 45°。

- 當 $k \to \infty$（楔塊無法移動）時，$A \to 0$，而一般公式給出 $a \to g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$，即大家熟悉的固定斜面結果。
- 數值上，取 $g = 9.8$、$k = 3$ 和 $\mu = 0.2$，直接解三條運動方程得 $a \approx 5.284\ \mathrm{m\,s^{-2}}$，與 $\frac{5g(3-0.8)}{3(6.8)}$ 吻合。把運動隨時間逐步推算，水平動量一直保持為零，所得路徑的傾角恰好是 45°。

常見錯誤

- 取 $R = mg\cos\theta$。這只在楔塊固定時才成立；這裏楔塊加速離開，所以 R 較小。
- 分解時只用相對加速度 a，忘記了楔塊的加速度。牛頓第二定律需要的是真實加速度。
- 在第 (ii) 部分，即使 P 沒有滑動，仍假設摩擦力是 μR。摩擦力最多是 μR，實際取值視乎需要而定。

STEP 之外

第 (i) 部分最巧妙的一步是一條守恆定律（conservation law）：由於外力沒有水平分量，動量的其中一個分量守恆。在大學一年級的力學課程中，這會發展成一個把對稱性（symmetry）與守恆定律聯繫起來的一般原理：在拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中，若拉格朗日量（Lagrangian）不依賴某個坐標（這裏是整個系統的水平位置），就會自動得出一個守恆的動量。光滑楔塊與物塊正是那裏標準的入門例子。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）詳細講解了正是這一類的問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。