詳細解答

STEP II 2008，第 10 題

力學 • 與牆壁的斜碰撞

STEP II 2008，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/08-s2-q10

關鍵思路

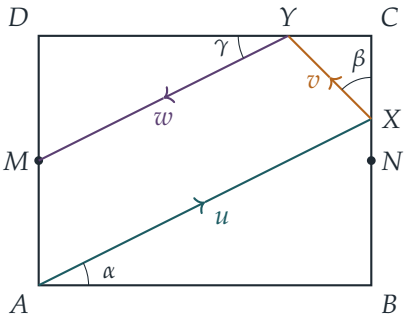
在光滑（smooth）的桌邊上，衝量（impulse）垂直於桌邊，所以沿桌邊方向的速度分量（component）不變，只有垂直撞向桌邊的分量會乘以 e。把速度分解成平行於 AB 和平行於 AD 的兩個分量，一切便一目了然：每次反彈只會改變兩個分量的其中一個。兩次反彈之後，兩個分量都各乘了 e，最終的方向和動能（kinetic energy）便同時確定下來。至於第 (ii) 部分的幾何，只需把各段水平距離加起來。

解答

我們把球看作質點（particle），把桌邊看作光滑的牆。取 A 為原點，x 軸沿 AB，y 軸沿 AD，於是

$$B = (a, 0), \quad C = (a, 2b), \quad D = (0, 2b), \quad M = (0, b), \quad N = (a, b).$$

為簡便起見，記 $t = \tan\alpha$。



第 (i) 部分

最初的速度是 $(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha)$。

*在 X 的碰撞。*邊 BC 平行於 y 軸。由於它是光滑的，球所受的衝量沿 x 方向，所以 y 分量 $u\sin\alpha$ 不變。根據牛頓恢復定律（Newton's law of restitution），x 分量會反向並乘以 e。碰撞後的速度是

$$(-eu\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

角 $\beta = \angle CXY$ 是從 XC 量起的，而這個方向指向 y 軸的正方向。所以

$$\tan\beta = \frac{eu\cos\alpha}{u\sin\alpha} = \frac{e}{\tan\alpha}, \qquad \text{即} \qquad \tan\alpha\tan\beta = e,$$

這正是所要證明的。

*在 Y 的碰撞。*邊 DC 平行於 x 軸，所以這次是 x 分量不變，而 y 分量反向並乘以 e。碰撞後的速度是

$$(-eu\cos\alpha,\ -eu\sin\alpha) = -e\,(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

這是初速度的負數倍，所以路徑的最後一段平行於 AX，而且方向相反。角 $\gamma = \angle DYM$ 是從 YD 量起的，而這個方向指向 x 軸的負方向；方向 $(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$ 與它的夾角為 α。因此

$$\gamma = \alpha.$$

第 (ii) 部分

我們沿着路徑追蹤 x 坐標。

*由 A 到 X。*球橫越寬度 a 的同時上升了 $a\tan\alpha$，所以 $X = (a,\ at)$。

*由 X 到 Y。*球再上升 $2b - at$，而在這一段，它每上升一個單位，就在 x 方向移動 $\tan\beta$ 個單位（因為 β 是從豎直的邊量起的）。利用第 (i) 部分的 $\tan\beta = e/t$，球向左移動的距離是 $(2b - at)\,e/t$，所以

$$x_Y = a - \frac{e(2b - at)}{t}.$$

*由 Y 到 M。*球由高度 $2b$ 下降到高度 b，即下降了 b，路徑在水平線之下成角 $\gamma = \alpha$。所以走過的水平距離是 $b/\tan\alpha$，而這段距離必須剛好把球帶到 $x = 0$：

$$x_Y = \frac{b}{t}.$$

想一想 為甚麼只追蹤 x 坐標就足夠？

每一段直線路徑都從上一段的終點開始，而它的方向已由第 (i) 部分得知。只要知道球在某一段上升或下降了多少，角度就決定了它橫向移動多遠。各段端點的高度都是固定

的（先是 o，然後在 DC 處是 $2b$，再在 M 處是 b），所以餘下的唯一條件，就是各段橫向距離加起來要吻合。

令 x_Y 的兩個表達式相等，並乘以 t：

$$\begin{aligned} b &= at - e(2b - at) \\ &= at(1+e) - 2be, \end{aligned}$$

所以 $at(1+e) = b(1+2e)$，由此得

$$\tan\alpha = \frac{(1+2e)b}{(1+e)a},$$

這正是所要證明的。

這一擊總是可行的。對任何 $e > 0$，這個 $\tan\alpha$ 的值都是正數，所以它確定了 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內的一個角 α。我們還要確認各個反彈點確實落在應該落在的邊上。

- X 的高度是 $at = \dfrac{1+2e}{1+e}\,b$。由於當 $e > 0$ 時 $1+e < 1+2e < 2+2e$，這個高度嚴格介乎 b 與 $2b$ 之間。所以 X 確實在 BC 上，位於 C 之下，並且在球袋 N 之上，球不會在途中掉進 N。
- Y 位於 $x_Y = b/t = \dfrac{1+e}{1+2e}\,a$，當 $e > 0$ 時這個值嚴格介乎 0 與 a 之間。所以 Y 確實在 DC 上，位於 D 與 C 之間。

最後一段則由 Y 沿直線走到 M，全程都在球桌之內。因此，無論 e 取甚麼值，路徑的每一段都是可行的。

第 (iii) 部分

由第 (i) 部分可知，末速度是初速度的 $-e$ 倍，所以 $w = eu$。（這也可以直接看出：每個分量都恰好乘了一次 e。）動能由 $\frac{1}{2}mu^2$ 減至 $\frac{1}{2}me^2u^2$，其中 m 是球的質量。因此損失的比例是

$$\frac{\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}me^2u^2}{\frac{1}{2}mu^2} = 1 - e^2.$$

這個結果與 a、b 和各個角度都無關。（若 $e > 1$，這個「損失」是負數，即桌邊反而給球增添能量。這並不符合物理實際，但代數運算依然成立。）

驗算

- 取 $a = 4$、$b = 1.5$ 和 $e = \frac{1}{2}$（即圖中的情況），公式給出 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$。於是 $X = (4, 2)$，$Y = (3, 3)$，而由 Y 出發、斜率（gradient）為 $\frac{1}{2}$ 的直線在水平距離 3 之內下降 1.5，剛好落在 $M = (0, 1.5)$。損失的動能比例是 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$。

- 當 $e = 1$（完全彈性，perfectly elastic）時，$\tan\alpha = 3b/(2a)$。把球桌先對 BC 反射、再對 DC 反射而「展開」：路徑變成由 A 到 M 的像的一條直線，橫向走了 $2a$，向上走了 $3b$。這給出相同的斜率 $3b/(2a)$。沒有能量損失，與 $1 - e^2 = 0$ 吻合。
- 我們對 a、b、e 和 u 隨機取了 20,000 組值來模擬反彈，結果證實了 $\tan\alpha\tan\beta = e$、$\gamma = \alpha$、球到達 M，以及比例 $1 - e^2$，誤差全部在 10^{-13} 之內。

常見錯誤

- 在碰撞時把 e 乘到整個速率上。其實只有垂直於桌邊的分量會改變，沿光滑桌邊的分量絲毫不變。
- 從 BC 的法線（normal）而不是從 XC 量度 β，結果把 $\tan\beta$ 變成了它的倒數。
- 忘記驗證 X 在 N 之上，以及 Y 在 D 與 C 之間。這項驗證正是「這一擊可行」的內容。

STEP 之外

當 $e = 1$ 時，把球桌反射來「展開」桌球路徑，可以把路徑變成一條直線。這是數學桌球（mathematical billiards）的起點，它與動力系統（dynamical systems）相關，而對於有理球桌，更與曲面上的幾何相關。當 $e < 1$ 時，反射不再像鏡面反射，但把速度分解成分量後仍然容易處理。關於衝量與恢復的力學，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）。想做更多這類題目，可以試試 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。