詳細解答

STEP II 2008，第 1 題

純數學 • 複數迭代

> **STEP II 2008，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q1

關鍵思路

$x^2 - y^2$ 和 $2xy$ 這兩個式子，正是 $(x + \mathrm{i}y)^2$ 的實部（real part）和虛部（imaginary part）。因此，若把每個點寫成複數（complex number）$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$，這個含兩個分量的規則就化為單一方程 $z_{n+1} = z_n^2 + c$，當中只有一個複常數 c。這樣，「常數」和「週期為 2」兩個條件都變成只含一個複未知數的二次方程（quadratic equation），可以用二次公式（quadratic formula）求解。

解答

設 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ 及 $c = a + (b+2)\mathrm{i}$。由於

$$z_n^2 + c = (x_n^2 - y_n^2 + a) + \mathrm{i}\,(2x_n y_n + b + 2),$$

而兩個複數相等，當且僅當它們的實部和虛部分別相等，所以該規則等價於

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

因為 a、b、x_n 和 y_n 都是實數，每個點 (x, y) 恰好對應一個複數，反之亦然。所以改用 z 來計算，不會有任何損失。

第 (i) 部分

當 $a = 1$、$b = -1$ 時，$c = 1 + \mathrm{i}$。數列（sequence）為常數數列，當且僅當 $z_2 = z_1$，因為此後每一步都只是重複同一個計算。所以我們需要

$$z^2 - z + (1 + \mathrm{i}) = 0, \qquad z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1+\mathrm{i})}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3 - 4\mathrm{i}}}{2}.$$

要求 $-3-4\mathrm{i}$ 的一個平方根，可設 $(p+q\mathrm{i})^2=-3-4\mathrm{i}$，其中 p、q 為實數：即 $p^2-q^2=-3$ 及 $pq=-2$。取 $p=1$、$q=-2$ 即可，因為 $(1-2\mathrm{i})^2=1-4\mathrm{i}-4=-3-4\mathrm{i}$。因此

$$z=\frac{1\pm(1-2\mathrm{i})}{2}=1-\mathrm{i}\quad\text{或}\quad\mathrm{i}.$$

所以數列為常數數列，當且僅當

$$(x_1,y_1)=(1,-1)\quad\text{或}\quad(x_1,y_1)=(0,1).$$

直接驗證：$(1,-1)\mapsto(1-1+1,\,-2+1)=(1,-1)$ 及 $(0,1)\mapsto(0-1+1,\,0+1)=(0,1)$。

第 (ii) 部分

現在 $z_1=-1+\mathrm{i}$，所以 $z_1^2=1-2\mathrm{i}-1=-2\mathrm{i}$，而

$$z_2=c-2\mathrm{i}.$$

記 $w=z_2$。當 $z_3=z_1$ 但 $z_2\neq z_1$ 時，數列的週期（period）為 2。一旦 $z_3=z_1$，按照規則，數列便會以 $z_1,z_2,z_1,z_2,\ldots$ 的形式不斷重複。利用 $c=w+2\mathrm{i}$，

$$z_3=w^2+c=w^2+w+2\mathrm{i},$$

所以 $z_3=z_1$ 變成

$$w^2+w+2\mathrm{i}=-1+\mathrm{i}\quad\Longleftrightarrow\quad w^2+w+(1+\mathrm{i})=0.$$

? **想一想** 為甚麼選 $w=z_2$ 作未知數，而不選 c？

無論用哪一個作未知數，條件 $z_3=z_1$ 都是一個關於 c 的二次方程；但若以 w 表示，常數數列 $w=z_1$ 必定是其中一個根（root）。所以我們已經知道這個二次方程的一個根，而另一個根正是我們要找的。事實上 $w=-1+\mathrm{i}$ 確實滿足方程：$(-1+\mathrm{i})^2+(-1+\mathrm{i})+1+\mathrm{i}=-2\mathrm{i}+2\mathrm{i}=0$。兩根之和為 -1，所以另一個根是 $w=-\mathrm{i}$。（用二次公式也得到相同結果：$w=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3-4\mathrm{i}})=\frac{1}{2}(-1\pm(1-2\mathrm{i}))$，所用的平方根與 (i) 相同。）

- $w=-1+\mathrm{i}=z_1$ 給出 $c=-1+3\mathrm{i}$，即 $a=-1$、$b=1$。這時 $z_2=z_1$，數列是常數數列，所以它的週期是 1，而不是 2。
- $w=-\mathrm{i}$ 給出 $c=\mathrm{i}$，即 $a=0$ 及 $b+2=1$。

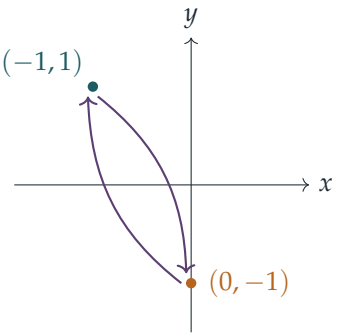
所以數列的週期為 2，當且僅當

$$a=0,\qquad b=-1.$$

用坐標驗算：當 $a = 0$、$b = -1$ 時，

$$(-1, 1) \mapsto (1 - 1 + 0,\ -2 + 1) = (0, -1) \mapsto (0 - 1 + 0,\ 0 + 1) = (-1, 1),$$

而這兩點並不相同，所以週期恰好是 2。



驗算

- 按原來的坐標規則迭代（iterate），可見當 $a = 1$、$b = -1$ 時，$(1, -1)$ 和 $(0, 1)$ 都固定不動；而當 $a = 0$、$b = -1$ 時，$(-1, 1) \to (0, -1) \to (-1, 1)$。
- 平方根 $1 - 2\mathrm{i}$ 可以通過把它平方來驗證；因式分解（factorisation）$w^2 + w + 1 + \mathrm{i} = (w + 1 - \mathrm{i})(w + \mathrm{i})$ 同樣可以驗證：兩根之積為 $(-1 + \mathrm{i})(-\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$。
- 以隨機起始值進行數值求根搜尋，在 (i) 中找不到其他不動點（fixed point），在 (ii) 中除了給出常數數列的 $(-1, 1)$ 之外，也找不到其他滿足 $z_3 = z_1$ 的 (a, b)。

常見錯誤

- 忘記第二個分量中的「+2」，於是取了 $c = a + b\mathrm{i}$，而不是 $a + (b + 2)\mathrm{i}$。
- 把 $a = -1$、$b = 1$ 當作 (ii) 的第二個答案。該數列是常數數列，所以它的週期是 1。
- 只用實坐標計算，結果在聯立二次方程中迷失方向。這樣做是可行的，但複數形式簡短得多。

STEP 之外

映射（map）$z \mapsto z^2 + c$ 是複動力系統（complex dynamics）中最著名的例子。曼德博集合（Mandelbrot set）是使 0 的軌道（orbit）保持有界的所有 c 所組成的集合；它最大的兩個部分，即主心臟線（main cardioid）和其左方的圓盤，分別由使該映射具有吸引

不動點（attracting fixed point）或吸引 2-循環（attracting 2-cycle）的 c 組成。在本題中，2-循環的方程同樣有一個來自不動點的因式：一般而言 $(z^2+c)^2+c-z=(z^2-z+c)(z^2+z+c+1)$。想了解這背後的幾何，可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《視覺複分析》），這是一本易讀的入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。