詳細解答

STEP I 2008，第 9 題

力學 • 滾動圓環的動量

> **STEP I 2008，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q9

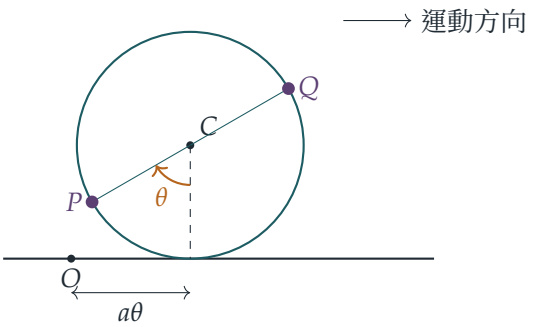
關鍵思路

純滾動（rolling without slipping）把平移與轉動連繫起來：當圓環轉過 θ 時，圓心移動的距離為 $a\theta$，即曾經接觸桌面的那段環邊的長度。因此每個質點的位置都是「圓心加上一條轉動的半徑」，求導便得出速度。至於最後一部分，留意外力沒有水平分量，所以總水平動量（momentum）不會改變，而這個動量原來是 $\dot{\theta}$ 的倍數。

解答

P 的位置與速率

把 P 和 Q 視為輕圓環上的質點（particle）。取 P 的起始點為原點，x 軸沿滾動的直線（指向圓環前進的方向），y 軸垂直向上。設圓環沿正 x 方向滾動，因此在下圖中它是順時針轉動的。



由於圓環沒有滑動，滾到桌面上的那段環邊弧長等於圓心移動的距離，所以圓心 C 位於

$(a\theta,\, a)$。起初 CP 指向正下方；順時針轉過 θ 之後，向量 $\overrightarrow{CP}$ 為 $(-a\sin\theta,\, -a\cos\theta)$。因此

$$\boxed{P = (a\theta - a\sin\theta,\; a - a\cos\theta)}$$

（這是一條擺線（cycloid））。利用鏈式法則（chain rule）對 t 求導，

$$\dot{x}_P = a\dot{\theta}(1-\cos\theta), \qquad \dot{y}_P = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

所以

$$v_P^2 = a^2\dot{\theta}^2[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = 2a^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

其中用到 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$。因此 P 的速率為

$$v_P = 2a\,|\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta| \qquad (= 2a\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta，當 0 \le \theta \le 2\pi,\ \dot{\theta} \ge 0).$$

當 θ 是 2π 的倍數時，這個速率為零，而這正好是 P 成為接觸點的時刻，與純滾動的要求一致。

動能

Q 位於直徑的另一端，所以 $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP}$，而

$$Q = (a\theta + a\sin\theta,\; a + a\cos\theta), \qquad \dot{x}_Q = a\dot{\theta}(1+\cos\theta), \quad \dot{y}_Q = -a\dot{\theta}\sin\theta.$$

同理，

$$v_Q^2 = a^2\dot{\theta}^2[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = 2a^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta.$$

圓環是輕的，所以動能（kinetic energy）只來自兩個質點：

$$T = \tfrac{1}{2}mv_P^2 + \tfrac{1}{2}mv_Q^2 = 2ma^2\dot{\theta}^2(\sin^2\tfrac{1}{2}\theta + \cos^2\tfrac{1}{2}\theta) = 2ma^2\dot{\theta}^2,$$

正如所求。

速率恆定

外力包括兩個質點的重量 mg 和桌面的反作用力（reaction），全部都是垂直的。因此系統所受的總水平力為零，而把牛頓第二定律（Newton's second law）應用於整個系統，可知其總水平動量恆定。（圓環是輕的，所以它不帶動量。）

> ? **想一想** 質點也有垂直方向的運動，為甚麼只考慮水平動量就足夠？

因為水平動量恰好只取決於 $\dot{\theta}$。把水平速度相加，

$$m\dot{x}_P + m\dot{x}_Q = ma\dot{\theta}(1-\cos\theta) + ma\dot{\theta}(1+\cos\theta) = 2ma\dot{\theta}.$$

$\cos\theta$ 項互相抵消：系統的質心（centre of mass）是 C，它始終以速度 $a\dot{\theta}$ 水平移動。由於 $2ma\dot{\theta}$ 恆定，$\dot{\theta}$ 亦恆定，所以圓環的速率（即其圓心的速率 $a\dot{\theta}$）恆定。 □

或用能量方法。 P 和 Q 的高度之和為 $(a - a\cos\theta) + (a + a\cos\theta) = 2a$，所以勢能（potential energy）$2mga$ 永不改變。反作用力作用於接觸點，而純滾動時接觸點瞬時靜止，所以反作用力不作功。因此 $T = 2ma^2\dot{\theta}^2$ 恆定，即 $|\dot{\theta}|$ 恆定；又因為 $\dot{\theta}$ 連續地變化，不可能不經過 0 而由一個符號跳到另一個符號，所以 $\dot{\theta}$ 本身恆定。動量的論證省卻了這最後一步，這就是我們先用它的原因。

驗算

- 當 $\theta = \pi$ 時，P 在最高點：公式給出 $P = (a\pi, 2a)$，速率為 $2a\dot{\theta}$，是圓心速率的兩倍，這正是滾動車輪頂點的熟悉結果。
- 動能等於 $\frac{1}{2}(2m)(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(2ma^2)\dot{\theta}^2$：質心的平移加上繞質心的轉動，其中轉動慣量（moment of inertia）為 $2ma^2$。兩項各為 $ma^2\dot{\theta}^2$。
- 數值上，取 $a = 1.3$、$\dot{\theta} = 2.1$ 和 $\theta = 1$，以有限差分（finite differences）對位置求導，得 $v_P^2 + v_Q^2 = 4a^2\dot{\theta}^2 \approx 29.8$；而當 $\dot{\theta}$ 恆定時，P 和 Q 的水平加速度互相抵消。

常見錯誤

- 把圓心放在 (a, a)，或者完全忘記圓心會移動：$a\theta$ 這一項正是滾動帶來的。
- 在 P 的位置中弄錯 $\sin\theta$ 的正負號；應檢查 P 起初的速度是否為零。
- 由動能恆定推斷速率恆定，卻沒有說明為甚麼 $\dot{\theta}$ 不能改變符號。

STEP 之外

這是一個雙質點的例子，說明了一個普遍的事實：系統的總動量只會因外力而改變，內力（這裏由圓環傳遞）則成對抵消。「驗算」中動能的分拆就是柯尼希定理（König's theorem）：動能等於質心的動能加上相對於質心運動的動能，這是剛體動力學（rigid-body dynamics）的起點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對滾動運動和這些概念有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。