詳細解答

# STEP I 2008，第 8 題

純數學 • 克萊羅微分方程

> **STEP I 2008，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q8

## 關鍵思路

兩條方程都含有 $y'$ 而不含 $y''$，而且都不屬於可以直接分離變數（separate variables）或直接積分的類型。竅門是再求導一次：只含 $y'$ 的項會互相抵消，餘下的式子可以因式分解（factorise），其中一個因式是 $y''$。每個因式對應一種情況，而在每種情況中，我們都代回原來的方程，而不是進行積分，這樣任意常數（arbitrary constant）便不費工夫地確定下來。

## 解答

以下一律記 $p = y'$，因此 $p' = y''$。

### 第 (i) 部分

把 $p^2 - xp + y = 0$ 對 $x$ 求導，其中 $xp$ 一項用積法則（product rule）：

$$2p\,y'' - (p + x\,y'') + p = 0 \quad \Longrightarrow \quad y''\,(2p - x) = 0.$$

兩個 $p$ 項互相抵消，所以在每一點上，或者 $y'' = 0$，或者 $2y' = x$，正如題目所求。

情況 $y'' = 0$。這時 $y'$ 是常數 $m$，而 $y = mx + c$。代入 $(*)$：

$$m^2 - xm + (mx + c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -m^2.$$

所以曲線是直線 $y = mx - m^2$。

情況 $2y' = x$。把 $p = \frac{1}{2}x$ 代入 $(*)$：

$$\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4y = x^2.$$

**想一想** 為甚麼不直接把 $y' = \frac{1}{2}x$ 積分，得出 $y = \frac{1}{4}x^2 + k$？

這樣做也可以，但對 $(*)$ 求導時丟失了一些資料：任何 $y = \frac{1}{4}x^2 + k$ 都滿足 $2y' = x$，卻只有 $k = 0$ 才滿足 $(*)$ 本身（例如 $k = 1$ 時，在 $x = 0$ 處得 $0 - 0 + 1 \neq 0$）。直接代回 $(*)$ 可一次過用盡所有資料，並且直接得出常數的值。第一種情況中 $c = -m^2$，也是同一道理。

所以曲線或者是直線 $y = mx + c$，其中 $c = -m^2$，或者是拋物線（parabola）$4y = x^2$。

這兩個答案互有關連：直線 $y = mx - m^2$ 與 $4y = x^2$ 相交於 $x^2 - 4mx + 4m^2 = 0$ 之處，即 $(x - 2m)^2 = 0$，所以每條直線都是拋物線在 $(2m, m^2)$ 的切線（tangent）。這條拋物線就是這族直線的包絡線（envelope）。

### 第 (ii) 部分

把 $(x^2 - 1)p^2 - 2xyp + y^2 - 1 = 0$ 對 $x$ 求導：

$$2xp^2 + 2(x^2 - 1)p\,y'' - 2yp - 2xp^2 - 2xy\,y'' + 2yp = 0.$$

不含 $y''$ 的項兩兩抵消，餘下

$$2y''[(x^2 - 1)p - xy] = 0.$$

情況 $y'' = 0$。這時 $y = mx + c$。留意到方程可以改寫成

$$(y - xp)^2 = 1 + p^2,$$

會方便得多，因為 $(y - xp)^2 - p^2 - 1 = y^2 - 2xyp + (x^2 - 1)p^2 - 1$。對於這條直線，$y - xp = c$ 而 $p = m$，所以

$$c^2 = 1 + m^2, \qquad \text{即} \qquad y = mx \pm \sqrt{1 + m^2}.$$

情況 $(x^2 - 1)p = xy$。當 $x^2 \neq 1$ 時，有 $p = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$，所以

$$y - xp = y - \frac{x^2 y}{x^2 - 1} = \frac{-y}{x^2 - 1}.$$

代入 $(y - xp)^2 = 1 + p^2$，再乘以 $(x^2 - 1)^2$：

$$\begin{aligned} y^2 &= (x^2 - 1)^2 + x^2 y^2 \\ y^2(1 - x^2) &= (1 - x^2)^2 \\ y^2 &= 1 - x^2, \end{aligned}$$

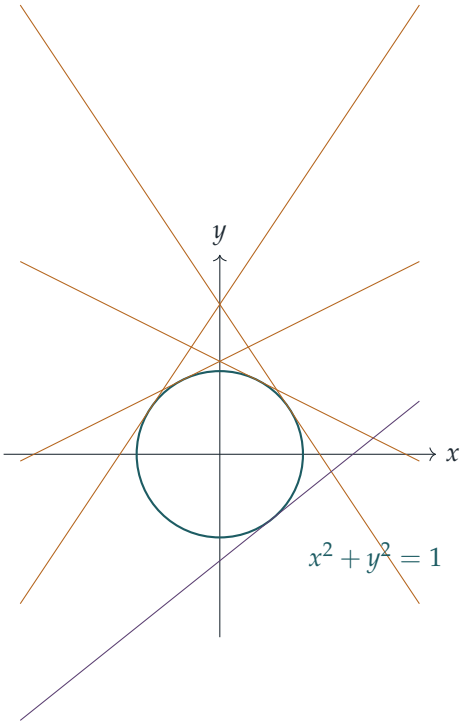
最後一步除以 $1-x^2 \neq 0$。所以曲線是圓 $x^2+y^2=1$。(在 $x=\pm 1$ 處，條件 $(x^2-1)p = xy$ 迫使 $y=0$，得出點 $(\pm 1, 0)$，它們也在同一個圓上。)

反過來，這個圓確實滿足方程：在圓上 $p=-x/y$，所以 $y-xp=(y^2+x^2)/y=1/y$，而 $1+p^2=(x^2+y^2)/y^2=1/y^2$，兩者吻合。

所以曲線或者是直線 $y=mx+c$，其中 $c^2=1+m^2$，或者是單位圓（unit circle）$x^2+y^2=1$。

**想一想** 直線 $y=mx\pm\sqrt{1+m^2}$ 與這個圓有甚麼關係？

原點到 $y=mx+c$ 的距離是 $|c|/\sqrt{1+m^2}$，在這裏剛好等於 1。所以這些直線正好就是單位圓的所有（非鉛垂）切線，一如 (i) 中的直線是拋物線的切線。




## 驗算

- 在 (i) 中取 $m=1$：$y=x-1$ 有 $p=1$，而 $1-x+x-1=0$。它與 $4y=x^2$ 相切於 $(2,1)$。
- 在 (ii) 中，圓上的點 $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ 有 $p=-\frac{3}{4}$；於是 $(x^2-1)p^2-2xyp+y^2-1 = -\frac{16}{25}\cdot\frac{9}{16}+\frac{18}{25}+\frac{16}{25}-1=0$。

- 數值方面，我們沿隨機選取的三次曲線檢驗了兩個求導後的因式分解，並確認直線、拋物線和圓所得的殘差（residual）均為 0（準確至 $10^{-13}$），而 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 則不然。

## 常見錯誤

- 把 $y' = \frac{1}{2}x$ 或 $y'' = 0$ 積分後留下一個任意常數：這個常數必須由原來的方程確定。
- 漏掉 $c = \pm\sqrt{1 + m^2}$ 中的 $\pm$：每個斜率（gradient）都有兩條互相平行的切線。

## STEP 之外

第 (i) 部分是一條*克萊羅方程*（Clairaut equation）$y = xp - f(p)$：它的通解（general solution）是直線族 $y = mx - f(m)$，此外還有一個*奇解*（singular solution），即該直線族的包絡線，無論怎樣選取常數都得不出它。第 (ii) 部分是同一現象，$y = xp \pm \sqrt{1 + p^2}$，包絡線是那個圓。奇解說明，一階方程（first-order equation）經過每一點的解不一定唯一；唯一性何時成立，正是大學第一門常微分方程（ODE）課程中存在與唯一性定理（existence and uniqueness theorems）所探討的課題。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教科書）是閱讀這方面內容的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。