詳細解答

STEP I 2008，第 7 題

純數學 • 旋轉與距離

> **STEP I 2008，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q7

關鍵思路

要求一點到一條過原點直線的垂直距離（perpendicular distance），只要把平面旋轉（rotation），令該直線落在 x 軸上，問題就變得容易：所求距離正是新 y 坐標的大小。第一部分的旋轉公式，正好替三條邊中的兩條完成這件事。至於最後一部分，竅門是去掉絕對值符號（modulus signs）：三個有向距離（signed distance）之和永遠是同一個常數，而取絕對值只會令總和變大。

解答

旋轉公式

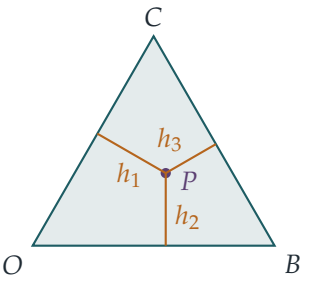
設 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，其中 $r = OP$，而 θ 是由正 x 軸量至 OP 的角。把 OP 順時針（clockwise）旋轉 $60°$，r 保持不變，角則變為 $\theta - 60°$，所以新的 y 坐標是

$$\begin{aligned} r\sin(\theta - 60°) &= r\sin\theta\cos 60° - r\cos\theta\sin 60° \\ &= \tfrac{1}{2}y - \tfrac{\sqrt{3}}{2}x = \tfrac{1}{2}(y - \sqrt{3}\,x), \end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。若改為逆時針（anticlockwise）旋轉，角變為 $\theta + 60°$，同樣展開，只是 $\sin 60°$ 的符號相反，便得新的 y 坐標

$$\tfrac{1}{2}(y + \sqrt{3}\,x).$$

三個距離



h_1。直線 OC 與 x 軸的夾角為 60°。把整幅圖繞 O 順時針旋轉 60°，OC 便落在 x 軸上，而距離保持不變。在旋轉後的圖中，P 到 x 軸的距離就是其新 y 坐標的絕對值，所以

$$h_1 = \tfrac{1}{2}|\, y - \sqrt{3}\, x\,|.$$

h_2。直線 OB 就是 x 軸，所以 $h_2 = |y|$。

h_3。現在繞 O 逆時針旋轉 60°。這個旋轉把 $B = (1,0)$ 送到 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$，並把 C（位於角 60° 處）送到角 120° 處的點，即 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$。因此直線 BC 變成水平線 $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$，而 P 的 y 坐標則變為 $\frac{1}{2}(y + \sqrt{3}\, x)$。於是

$$h_3 = \left|\tfrac{1}{2}(y + \sqrt{3}\, x) - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right| = \tfrac{1}{2}|\, \sqrt{3}\, x + y - \sqrt{3}\,|.$$

（換個做法：BC 的方程是 $\sqrt{3}\, x + y = \sqrt{3}$，由於 $\sqrt{3+1} = 2$，用慣常的距離公式亦得出相同答案。）

最後一部分

定義以下帶正負號的量：

$$s_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\, x - y), \qquad s_2 = y, \qquad s_3 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{3}\, x - y),$$

使得對 $i = 1,2,3$ 均有 $h_i = |s_i|$。把三者相加，

$$s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x - \tfrac{1}{2}y + y + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x - \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

對每一點 (x, y) 都成立。

? **想一想** s_1、s_2、s_3 的正負號與三角形有甚麼關係？

每個 s_i 都是一個線性式，並且在三角形的其中一條邊上等於零。以位於三角形內部的形心（centroid）$(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\sqrt{3})$ 作測試，得 $s_1 = s_2 = s_3 = \frac{1}{6}\sqrt{3} > 0$。所以 $s_2 \geq 0$ 是 OB 包含 C

的一側，$s_1 \geq 0$ 是 OC 包含 B 的一側，而 $s_3 \geq 0$ 是 BC 包含 O 的一側。閉三角形 OBC 正是這三個半平面（half-plane）的交集，所以

$$P \text{ 落在（含邊界的）} OBC \iff s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0.$$

對任意實數 s，我們有 $|s| \geq s$，等號成立當且僅當（if and only if）$s \geq 0$。因此

$$h_1 + h_2 + h_3 = |s_1| + |s_2| + |s_3| \ \geq\ s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

等號成立當且僅當對每個 i 都有 $|s_i| = s_i$，亦即當且僅當三個 s_i 全部非負。根據上一段，這恰好在 P 位於三角形 OBC 的邊上或內部時發生。這樣便一次過證明了兩個方向：

$$h_1 + h_2 + h_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \iff P \text{ 落在（含邊界的）三角形} OBC.$$

還要留意，在三角形外，這個和嚴格大於 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$。

驗算

- 在頂點上，例如 $P = B = (1,0)$：$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$，$h_2 = 0$，$h_3 = 0$，和為 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$。正確。
- 在形心處，每個距離都是 $\frac{1}{6}\sqrt{3}$，三個加起來是 $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.8660$，即三角形的高。
- 在三角形外，取 $P = (2,0)$：$h_1 = \sqrt{3}$，$h_2 = 0$，$h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$，和為 $\frac{3}{2}\sqrt{3} > \frac{1}{2}\sqrt{3}$。
- 我們在 10^5 個隨機點上，把三條公式與直接計算的點到直線距離作比較（吻合至 10^{-15}），並在 2×10^5 個點（包括許多位於邊上的點）上測試了「當且僅當」的結論，沒有發現任何例外。

常見錯誤

- 弄錯旋轉的正負號：順時針表示角減小，得 $\theta - 60°$。
- 只證明一個方向。驗證了在三角形內和為 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 並不足夠；你還必須證明在三角形外和不是 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$。不等式 $|s| \geq s$ 可以一次過處理兩個方向。
- 忘記 h_1、h_2、h_3 中的絕對值符號：距離永遠不會是負數。

STEP 之外

這就是維維亞尼定理（Viviani's theorem）：在等邊三角形（equilateral triangle）中，內部任意一點到三邊的距離之和等於三角形的高。有向距離 s_1, s_2, s_3（相差一個比例常數）就是 P 的重心坐標（barycentric coordinates）或三線坐標（trilinear coordinates），它

們的和永遠是常數，並且恰好在三角形內全部非負；它們是幾何、電腦圖形學和凸分析中的標準工具。旋轉公式是 2×2 旋轉矩陣（rotation matrix）的第二行，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）是認識如何把旋轉看成線性映射（linear map）的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。