詳細解答

STEP I 2008，第 6 題

純數學 • 反函數與面積

> **STEP I 2008，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q6

關鍵思路

反函數（inverse function）的圖像是原函數圖像沿直線 $y = x$ 的反射（reflection），所以把 g 對 y 積分，得到的是一塊橫向量度的面積，即曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ 與 y 軸之間的面積。積分上限 k 並非隨意選取：它正好等於 $\mathrm{f}(\frac{1}{2})$。一旦看出這一點，兩塊面積便剛好拼成一個長方形。

解答

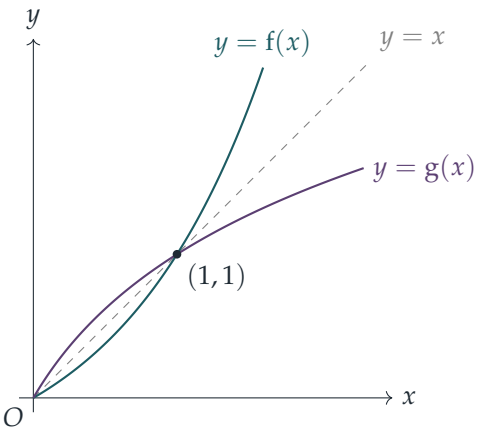
草圖

函數 f 是遞增（increasing）的，且 $\mathrm{f}(0) = 0$、$\mathrm{f}(1) = 1$。由於 $\mathrm{f}''(x) = \mathrm{e}^x/(\mathrm{e}-1) > 0$，它是凸（convex）的，而它在原點的斜率（gradient）為 $\mathrm{f}'(0) = 1/(\mathrm{e}-1) \approx 0.58 < 1$。因此在 $0 < x < 1$ 上，曲線位於直線 $y = x$ 之下，在 $(1,1)$ 與該直線相交，其後以指數方式增長。

要求出 g，可從 $y = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}-1}$ 解出 x：

$$\mathrm{g}(x) = \ln(1 + (\mathrm{e}-1)x), \qquad x \geq 0,$$

這是因為 f 的值域（range）是 $[0, \infty)$。它的圖像是 $y = \mathrm{f}(x)$ 沿 $y = x$ 的反射：它通過 $(0,0)$，在該點的斜率為 $\mathrm{e} - 1 \approx 1.72$，是凹（concave）的，在 $(1,1)$ 與 $y = x$ 相交，其後只以對數方式增長。



第一個積分

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[\mathrm{e}^x - x\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\sqrt{\mathrm{e}} - \tfrac{1}{2} - 1\Big) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2}}{\mathrm{e}-1}.$$

第二個積分

首先留意

$$\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}+1} = k,$$

這裏用了平方差（difference of two squares）$\mathrm{e}-1 = (\sqrt{\mathrm{e}})^2 - 1$。換言之，$\mathrm{g}(k) = \frac{1}{2}$，而且 $1 + (\mathrm{e}-1)k = 1 + (\sqrt{\mathrm{e}}-1) = \sqrt{\mathrm{e}}$。

> **想一想** 怎樣對 $\ln(1+(\mathrm{e}-1)x)$ 積分？

作代換（substitution）$u = 1 + (\mathrm{e}-1)x$，於是 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/(\mathrm{e}-1)$，積分上下限變為 $u = 1$ 和 $u = \sqrt{\mathrm{e}}$。然後利用 $\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u - u$（把被積函數看成 $\ln u$ 乘以 1，再用分部積分法（integration by parts））：

$$\begin{aligned}\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \ln u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[u\ln u - u\Big]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}} - (0-1)\Big) = \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1},\end{aligned}$$

其中用了 $\ln\sqrt{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$。

相加

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{\mathrm{e}}-1)}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)},$$

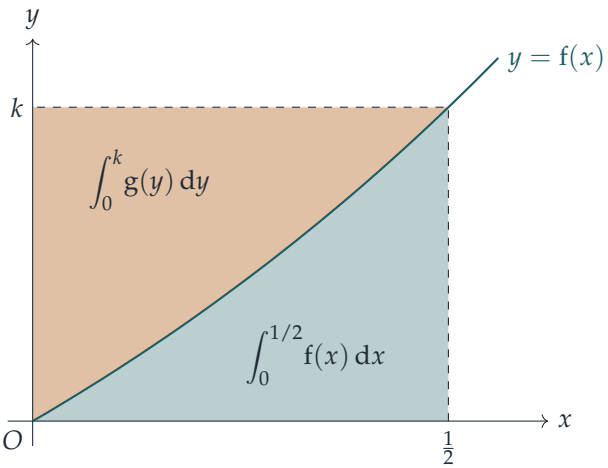
這正是所要求的結果。

解釋這個結果

答案是 $\frac{1}{2}\times k$，即以 $(0,0)$ 和 $(\frac{1}{2},k)$ 為對角頂點的長方形的面積。原因如下。

> **想一想** 在 f 的圖像上，$\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ 在哪裏？

沿 $y=x$ 反射不會改變面積。$y=\mathrm{g}(x)$ 之下、$0\le x\le k$ 的區域，經反射後變成曲線 $y=\mathrm{f}(x)$ 與 y 軸之間、$0\le y\le k$ 的區域。換句話說，它就是沿曲線 $y=\mathrm{f}(x)$ 的 $\int_0^k x\,\mathrm{d}y$：曲線*左邊*的面積。由於 $\mathrm{f}(\frac{1}{2})=k$，曲線由長方形的頂點 $(0,0)$ 走到頂點 $(\frac{1}{2},k)$，把長方形分成兩塊：曲線之下的面積（第一個積分，藍綠色）和曲線左邊的面積（第二個積分，琥珀色）。



因此兩個積分合起來正好是整個長方形，面積為 $\frac{1}{2}k=\dfrac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)}$。同一幅圖還給出一個一般結論：對於滿足 $\mathrm{f}(0)=0$ 的遞增函數，

$$\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\mathrm{f}(a)}\mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y=a\,\mathrm{f}(a).$$

驗算

以數值計算，第一個積分約為 0.08655，第二個約為 0.10222；對兩者分別使用辛普森法則（Simpson's rule），結果與精確式子吻合至小數點後十二位，而兩者之和 0.18877 等於 $1/(2(\sqrt{\mathrm{e}}+1))$。再用草圖作個合理性檢查：兩塊面積都是正數，而且藍綠色的一塊較小，這是理所當然的，因為凸曲線下垂至長方形對角線之下。

常見錯誤

- 沒有留意到 $k = \mathrm{f}(\frac{1}{2})$，因而錯過了 $1 + (\mathrm{e} - 1)k = \sqrt{\mathrm{e}}$ 這個化簡。
- 把 f 在原點附近畫在 $y = x$ 之上：它在該處的斜率是 $1/(\mathrm{e} - 1) < 1$。
- 作圖時，在另一幅圖上把 $y = \mathrm{g}(x)$ 之下的面積塗上陰影，卻沒有說明它與 $y = \mathrm{f}(x)$ 旁邊的區域有何關係；關鍵在於反射把其中一個區域變成另一個。

STEP 之外

恆等式 $\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^{\mathrm{f}(a)} \mathrm{f}^{-1} = a\,\mathrm{f}(a)$ 是楊氏不等式（*Young's inequality*）中等號成立的情況：對任意 $b \geq 0$，$\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^b \mathrm{f}^{-1} \geq ab$。取 $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$，便得到 $ab \leq a^p/p + b^q/q$，其中 $1/p + 1/q = 1$，這是分析學中赫爾德不等式（Hölder's inequality）的起點。想知道這類積分如何嚴格地建立起來，Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門書）是很好的讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。