詳細解答

STEP I 2008，第 5 題

純數學 • 多項式的界限

> **STEP I 2008，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q5

關鍵思路

當 $n = 1$ 時，多項式（polynomial）是一條直線，它在區間兩個端點的值互相牽制：兩者恰好相差 2，所以不可能同時都很小。第 (ii) 部分的竅門是先除以首項係數（leading coefficient），使切比雪夫（Chebyshev）定理可以直接應用於該曲線本身。定理於是迫使 $|y|$ 在 $[-1,1]$ 內某處必須很大，而端點處的值卻很小。一條曲線若升得比兩個端點值都高（或降得比兩者都低），就必定在中間某處轉向。

解答

第 (i) 部分

$n = 1$ 的情況。這時 $\mathrm{p}(x) = x + a_0$，我們需要證明 $M \geq 2^0 = 1$。由於 M 不小於 $|\mathrm{p}|$ 在 $[-1,1]$ 內任何一點的值，它自然不小於端點處的值：

$$M \geq |\mathrm{p}(1)| = |1 + a_0| \quad \text{及} \quad M \geq |\mathrm{p}(-1)| = |a_0 - 1|.$$

兩式相加，並利用三角不等式（triangle inequality）$|u| + |v| \geq |u - v|$，

$$2M \geq |1 + a_0| + |a_0 - 1| \geq |(1 + a_0) - (a_0 - 1)| = 2,$$

所以 $M \geq 1 = 2^{1-n}$，這就證明了定理在 $n = 1$ 時成立。（當 $\mathrm{p}(x) = x$ 時等號成立，所以這個界不能再改進。）

(a) 對於 $\mathrm{p}(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ 及 $|x| \leq 1$，我們有 $0 \leq x^2 \leq 1$，所以 $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{p}(x) \leq \frac{1}{2}$。在 $x = \pm 1$ 處取得 $\frac{1}{2}$ 這個值（而在 $x = 0$ 處取得 $-\frac{1}{2}$），所以

$$M = \tfrac{1}{2} = 2^{1-2}.$$

定理成立，而且等號成立。

(b) 對於 $\mathrm{p}(x) = x^3 - x$，我們需要 $M \geq 2^{1-3} = \frac{1}{4}$。只要找到一個點使得 $|\mathrm{p}| \geq \frac{1}{4}$ 就足夠了。駐點 (stationary point) 出現在 $3x^2 - 1 = 0$ 之處，即 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，兩者都在 $[-1,1]$ 內，而且

$$\mathrm{p}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

由於 $\mathrm{p}(\pm 1) = 0$，這其實就是最大值：$M = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.385$。若要不用計算機而與 $\frac{1}{4}$ 比較，可把兩邊平方：

$$\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{27} > \frac{4}{64} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

所以 $M > \frac{1}{4}$，定理成立（這次還綽綽有餘）。

第 (ii) 部分

設 $f(x) = 64x^5 + 25x^4 - 66x^3 - 24x^2 + 3x + 1$。切比雪夫定理針對的是首項係數為 1 的多項式，所以我們把它應用於

$$\mathrm{p}(x) = \tfrac{1}{64}f(x) = x^5 + \tfrac{25}{64}x^4 - \tfrac{66}{64}x^3 - \tfrac{24}{64}x^2 + \tfrac{3}{64}x + \tfrac{1}{64},$$

它具有所需的形式，其中 $n = 5$。定理給出 $\max_{|x|\leq 1} |\mathrm{p}(x)| \geq 2^{-4} = \frac{1}{16}$，再乘以 64，

$$\max_{|x|\leq 1} |f(x)| \geq 4.$$

所以存在某個 $x_0 \in [-1,1]$ 使得 $|f(x_0)| \geq 4$。

現在看看端點：

$$f(1) = 64 + 25 - 66 - 24 + 3 + 1 = 3,$$
$$f(-1) = -64 + 25 + 66 - 24 - 3 + 1 = 1.$$

兩者的模（modulus）都小於 4，所以 x_0 不是端點：$-1 < x_0 < 1$。

想一想 我們知道 $|f|$ 在區間內部會變得很大。為甚麼這樣就必定有轉向點？

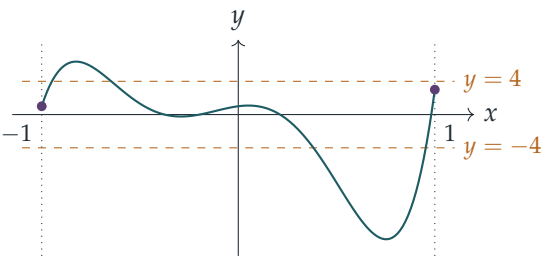
這裏有兩種情況。

- 若 $f(x_0) \geq 4$，則 $f(x_0)$ 比 $f(-1) = 1$ 和 $f(1) = 3$ 都大。連續函數（continuous function）f 在閉區間（closed interval）$[-1,1]$ 上取得最大值；這個值至少是 $f(x_0) \geq 4$，所以它不是在任何一個端點取得的。因此它是在一個內點取得的，而該點就是 f 的局部極大點（local maximum）。

- 若 $f(x_0) \le -4$，則 $f(x_0)$ 低於兩個端點值，同理 f 在 $[-1,1]$ 上的最小值是在一個內點取得的，而該點就是局部極小點（local minimum）。

無論哪種情況，f 都有一個局部極大點或極小點嚴格位於 $(-1,1)$ 之內。在該點 $f'=0$，而由於 f 是非常數多項式，f' 只有有限個零點。所以 f' 在該點左邊附近保持同一個符號，在右邊附近也保持同一個符號。因為該點是局部極大點或極小點，這兩個符號必定相反，所以它是一個真正的轉向點（turning point）。因此曲線在 $-1 \le x \le 1$ 內至少有一個轉向點，這正是所要證明的。

留意我們從頭到尾都不必解四次方程 $f'(x)=0$。這正是本題的用意。



草圖顯示曲線在 $[-1,1]$ 上的形狀。兩個端點值都位於虛線 $y=\pm 4$ 之間，但曲線卻走出了這條帶狀區域。事實上它在區間內有四個轉向點，最深的一個在 $x \approx 0.75$ 附近，該處 $y \approx -15$。

驗算

- 當 $n=1$ 時，試幾個 a_0 的值便可看到 $\max(|1+a_0|, |1-a_0|)$ 永遠不小於 1，而且只有在 $a_0=0$ 時才等於 1。
- 在 (b) 中，$\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.3849$，遠高於 0.25。在細密的格點上對 x^3-x 取樣，可確認這就是 $|x^3-x|$ 的最大值。
- 在 (ii) 中，對 f 在 $[-1,1]$ 上作數值掃描，得到 $\max|f| \approx 15.0$（在 $x \approx 0.753$ 處，該處 $f \approx -15.0$），遠高於定理所保證的 4。掃描亦發現 f' 在 $x \approx -0.825,\ -0.292,\ 0.052,\ 0.753$ 處變號。

常見錯誤

- 直接把定理應用於 f。它的首項係數是 64 而不是 1，所以必須先除以 64。所得的界變成 $64 \cdot 2^{-4} = 4$。
- 停在「某處 $|f| \ge 4$」這一步。單憑這一點並不能得出轉向點：你還需要端點值 1 和

3，才能說明極值是在區間內部取得的。

► 在 (b) 中，草率地比較 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ 與 $\frac{1}{4}$。把兩個正數平方，便可作出準確的比較。

STEP 之外

切比雪夫定理中的等號恰好在 $2^{1-n}T_n(x)$ 時成立，其中 T_n 是由 $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ 定義的切比雪夫多項式（Chebyshev polynomial）。(a) 部分就是 $\frac{1}{2}T_2$，而 $n = 1$ 的情況就是 $T_1(x) = x$。這些多項式是逼近理論（approximation theory）的起點：它們解釋了為甚麼在切比雪夫節點（Chebyshev nodes）上插值（interpolation）的效果最好，勝過在等距點上插值。第 (ii) 部分的論證用到極值定理（extreme value theorem，即閉區間上的連續函數必取得其上下界），這個定理會在大學第一門分析課中嚴格證明。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門教科書）是閱讀這個定理的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。