詳細解答

STEP I 2008，第 4 題

純數學 • 凸函數

> **STEP I 2008，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q4

關鍵思路

兩個函數都是指數函數（exponential），形如 $\mathrm{e}^{h(x)}$，求導兩次便得 $(h'' + (h')^2)\mathrm{e}^h$。指數因子恆為正，所以凸性（convexity）問題歸結為 $h'' + (h')^2$ 的正負，這是一個純粹的三角不等式。在 (i) 中，這個不等式比較的恰好就是題目要求我們繪畫的兩條曲線。在 (ii) 中，它化簡為 $\sin 2x$ 與 $\sin 2\alpha$ 的比較。

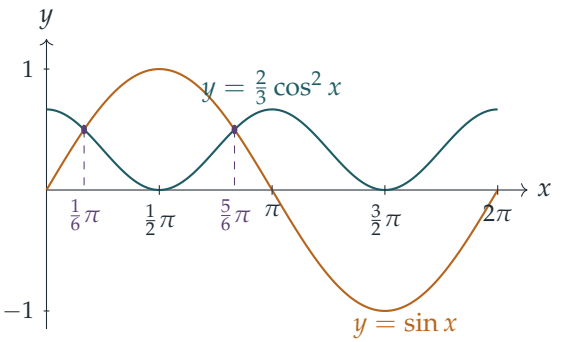
解答

第 (i) 部分

草圖。曲線 $y = \frac{2}{3}\cos^2 x$ 介乎 0 與 $\frac{2}{3}$ 之間。它在 $x = 0, \pi, 2\pi$ 處取值 $\frac{2}{3}$，並在 $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ 處與橫軸相切，週期為 π。曲線 $y = \sin x$ 是常見的正弦波。要找出兩者的交點，設 $s = \sin x$，並用 $\cos^2 x = 1 - s^2$：

$$\tfrac{2}{3}(1 - s^2) = s \iff 2s^2 + 3s - 2 = 0 \iff (2s - 1)(s + 2) = 0.$$

由於 $s = -2$ 不可能成立，故 $\sin x = \frac{1}{2}$，所以兩條曲線只在 $x = \frac{1}{6}\pi$ 和 $x = \frac{5}{6}\pi$ 相交。在 $(\pi, 2\pi)$ 上，正弦曲線為負，而另一條曲線非負，所以該處沒有交點。



f 的凸性。設 $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sin x}$，由鏈式法則（chain rule）得 $f'(x) = \frac{2}{3}\cos x\, f(x)$，再用乘積法則（product rule），

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\tfrac{2}{3}\sin x\, f(x) + \tfrac{2}{3}\cos x\, f'(x) \\ &= f(x)\left(\tfrac{4}{9}\cos^2 x - \tfrac{2}{3}\sin x\right) \\ &= \tfrac{2}{3}f(x)\left(\tfrac{2}{3}\cos^2 x - \sin x\right). \end{aligned}$$

想一想 為甚麼括號內的式子就能決定一切？

由於 $f(x)$ 是指數函數，它嚴格為正，所以 $f''(x) \geq 0$ 當且僅當 $\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$。換言之，$f$ 為凸函數之處，恰好就是青綠色曲線位於琥珀色曲線之上或與之重合的地方。這就是題目先要求繪畫草圖的原因。

由草圖及上面求得的交點可知，當 $0 < x \leq \frac{1}{6}\pi$ 以及 $\frac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi$ 時，$\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$。在 $\frac{1}{6}\pi$ 與 $\frac{5}{6}\pi$ 之間，正弦曲線在上方（例如在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 處，兩個值分別為 0 和 1）。所以 f 在

$$0 < x \leq \tfrac{1}{6}\pi \qquad \text{及} \qquad \tfrac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi,$$

上是凸的，而且不能在更大的區間上是凸的。（端點 $\frac{1}{6}\pi$ 和 $\frac{5}{6}\pi$ 處 $f'' = 0$，是否把它們包括在內，視乎個人習慣。）

第 (ii) 部分

設 $g(x) = \mathrm{e}^{-k\tan x}$，則 $g'(x) = -k\sec^2 x\, g(x)$。利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x \tan x$ 及乘積法則，

$$\begin{aligned} g''(x) &= -2k\sec^2 x \tan x\, g(x) - k\sec^2 x\, g'(x) \\ &= g(x)\left(k^2\sec^4 x - 2k\sec^2 x \tan x\right) \\ &= k\sec^2 x\, g(x)\left(k\sec^2 x - 2\tan x\right). \end{aligned}$$

這裏 $k = \sin 2\alpha > 0$，因為 $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$；另外 $\sec^2 x > 0$，$g(x) > 0$。所以 $g''(x) \geq 0$ 當且僅當 $k \sec^2 x \geq 2\tan x$。兩邊乘以 $\cos^2 x > 0$，這就變成

$$k \geq 2\tan x \cos^2 x = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

所以 g 為凸函數之處，恰好就是滿足

$$\sin 2x \leq \sin 2\alpha.$$

的地方。

想一想 當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時，$\sin 2x \leq \sin 2\alpha$ 在哪裏成立？

當 x 取遍 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 時，$2x$ 取遍 $(0, \pi)$。在這個區間上，sin 先遞增至 $\frac{1}{2}\pi$，然後遞減，並且關於 $\frac{1}{2}\pi$ 對稱。$\sin 2\alpha$ 這個值（其中 $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$）在 $2x = 2\alpha$ 和 $2x = \pi - 2\alpha$ 處取得。所以 $\sin 2x \leq \sin 2\alpha$ 當且僅當 $2x \leq 2\alpha$ 或 $2x \geq \pi - 2\alpha$。即是

$$0 < x \leq \alpha \qquad \text{或} \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \leq x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

特別地，當 $0 < x < \alpha$ 時，我們有 $0 < 2x < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$，而 sin 在該處遞增，所以 $\sin 2x < \sin 2\alpha = k$，且 $g''(x) > 0$。因此 g 在 $0 < x < \alpha$ 上是凸的，正如題目所求。

另一個區間是

$$\tfrac{1}{2}\pi - \alpha < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

它與第一個區間確實不同，因為由 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ 可得 $\frac{1}{2}\pi - \alpha > \frac{1}{4}\pi > \alpha$。在中間一段 $\alpha < x < \frac{1}{2}\pi - \alpha$ 上，g 不是凸的。

驗算

- 在 $x = \frac{1}{6}\pi$ 處：$\frac{2}{3}\cos^2 x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \sin x$，所以該處 $f'' = 0$，這正是邊界點應有的情況。
- 在 (ii) 中，問題在 $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ 之下是對稱的，因為 $\sin 2x$ 保持不變。這解釋了為甚麼第二個區間是第一個區間的鏡像。
- 數值上，取 $\alpha = 0.5$ ($k \approx 0.841$)，用有限差分（finite difference）計算 g 的二階導數（second derivative），在 $x = 0.3$ 和 $x = 1.3$ 處為正，在 $x = 0.8$ 處為負。由於 $\frac{1}{2}\pi - \alpha \approx 1.071$，這與求得的區間吻合。用電腦測試大量隨機的 α 和 x，結果與兩部分的答案都一致。

常見錯誤

- 對 $e^{h(x)}$ 求導兩次時遺漏了 $(h')^2$ 一項。二階導數並不只是 $h''e^h$。

- 在 (i) 中漏掉了整個 $(\pi, 2\pi)$。在那裏 $\sin x < 0 \leq \frac{2}{3}\cos^2 x$，所以 f 由 $\frac{5}{6}\pi$ 一直到 2π 都是凸的。
- 做到 $\sin 2x \leq \sin 2\alpha \Rightarrow x \leq \alpha$ 便停下來。由於 sin 在 $(0, \pi)$ 上並非單調 (monotonic)，這樣會漏掉第二個區間。

STEP 之外

二階導數判別法只是凸性的其中一面。真正的定義是幾何的：每一條弦（chord）都位於圖像之上或與圖像重合。對可導函數而言，這等價於 f' 遞增，並由此引出琴生不等式（Jensen's inequality），它是算術幾何平均不等式（AM–GM）以及概率和最優化中許多結果的基礎。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis* 對凸函數有嚴謹的論述。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則提供更多 STEP 風格的練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。