詳細解答

STEP I 2008，第 3 題

純數學 • 以重排法證明不等式

> **STEP I 2008，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q3

關鍵思路

不等式（inequality）$(*)$ 其實只是兩個非負因子之積的另一種寫法。一旦證明了它，其後每一個不等式都只在於如何選取 a、b、c、d，使 $(*)$ 的兩邊變成我們想要的兩邊，同時確保條件 $c \geq a$ 和 $d \geq b$ 確實成立。由於要證明的不等式都是對稱（symmetric）的，我們可以先把各變數按大小排好次序，而正是這個次序提供了上述條件。

解答

證明 $(*)$

把所有項移到同一邊，然後因式分解（factorise）：

$$ab + cd - bc - ad = a(b-d) - c(b-d) = (c-a)(d-b).$$

若 $c \geq a$ 且 $d \geq b$，兩個因子皆為非負，故其積亦為非負。因此 $ab + cd \geq bc + ad$，而等號成立當且僅當 $c = a$ 或 $d = b$。

第 (i) 部分

兩個變數。設 $x \geq y$。在 $(*)$ 中取

$$a = y, \quad b = y, \quad c = x, \quad d = x.$$

條件 $c \geq a$ 和 $d \geq b$ 所說的都是 $x \geq y$，這正是已知條件。於是 $ab + cd = y^2 + x^2$ 而 $bc + ad = xy + xy$，所以由 $(*)$ 得

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

三**個變數**。現在再假設 $x \geq z$ 且 $y \geq z$。取

$$a = z, \quad b = z, \quad c = x, \quad d = y.$$

這裏 $c \geq a$ 即 $x \geq z$，$d \geq b$ 即 $y \geq z$，兩者皆為已知。此時 $ab + cd = z^2 + xy$ 而 $bc + ad = zx + zy$，所以

$$z^2 + xy \geq xz + yz.$$

把這個不等式與 $x^2 + y^2 \geq 2xy$ 相加（由於 $x \geq y$，後者可以使用）：

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy \geq 2xy + xz + yz,$$

再從兩邊減去 xy，得

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

到目前為止，這個結果只在 $x \geq y \geq z$ 的情況下得到證明。

想一想 一個只在 $x \geq y \geq z$ 時證明了的結果，怎樣才能推出對所有 x、y、z 都成立的結果？

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ 的兩邊都是對稱的：把任意兩個變數對調，每一邊都保持不變。給定任意實數 x、y、z，把它們由大至小排列為 $X \geq Y \geq Z$。根據剛才所證，$X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX$。但這與關於 x、y、z 的不等式是同一個不等式，只是各項的次序不同而已。所以這個不等式對所有實數 x、y 和 z 都成立。

（等號成立需要我們相加的兩個不等式同時取等號，這就迫使 $x = y = z$。）

第 (ii) 部分

這個式子是三對數之和，每一對都是一個數加上它的倒數（reciprocal）：

$$\left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s}\right) + \left(\frac{t}{r} + \frac{r}{t}\right) + \left(\frac{r}{s} + \frac{s}{r}\right).$$

因此只需證明對任意正數 p、q 都有 $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} \geq 2$，這正是 $x^2 + y^2 \geq 2xy$ 的類比。

式子 $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ 對 p 和 q 是對稱的，所以我們可以適當命名，使得 $p \geq q > 0$。在 $(*)$ 中取

$$a = q, \quad b = \frac{1}{p}, \quad c = p, \quad d = \frac{1}{q}.$$

於是 $c \geq a$ 即 $p \geq q$，而 $d \geq b$ 即 $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p}$；由於 p 和 q 都是正數，後者同樣可由 $p \geq q$ 推出。現在

$$ab + cd = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}, \qquad bc + ad = \frac{p}{p} + \frac{q}{q} = 2,$$

所以由 $(*)$ 得 $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} \geq 2$。

把這個結果應用於 (s,t)、(t,r) 和 (r,s) 三對數，再把三個結果相加，便得

$$\frac{s}{t}+\frac{t}{r}+\frac{r}{s}+\frac{t}{s}+\frac{r}{t}+\frac{s}{r}\geq 2+2+2=6$$

對所有正數 r、s 和 t 都成立，這正是所要證明的。等號成立當且僅當 $r=s=t$，因為每一對都需要其中兩數相等。

驗算

- 在第 (i) 部分試代入 $x=3$、$y=1$、$z=-2$：左邊是 14，右邊是 $3-2-6=-5$。把這三個值任意置換，兩邊都保持不變，正如對稱性論證所需。
- 第 (i) 部分的另一個獨立證明：$2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$。
- 取 $r=2$、$s=1$、$t=1$，第 (ii) 部分的式子等於 $1+\frac{1}{2}+2+1+2+\frac{1}{2}=7\geq 6$。用電腦對 20,000 個隨機的精確有理數例子逐步檢查，沒有發現任何反例；而 $r=1.001$、$s=1$、$t=0.999$ 之類的數值所得的和僅僅略大於 6。

常見錯誤

- 使用 $(*)$ 時沒有檢查 $c\geq a$ 和 $d\geq b$。若代入方式不當，不等號的方向可能會相反。
- 在第 (ii) 部分，忘記了 $\frac{1}{q}\geq\frac{1}{p}$ 用到正數這個條件：對於負數，取倒數並不會以同樣的方式把大小次序倒轉。
- 只在 $x\geq y\geq z$ 的情況下證明第 (i) 部分，卻沒有解釋為何憑對稱性可得出一般情況。

STEP 之外

不等式 $(*)$ 是*排序不等式*（rearrangement inequality）在兩項時的情況：若兩列數都已按大小排好，則按相同次序配對時乘積之和最大，按相反次序配對時乘積之和最小。本題的兩個結果，以及兩項的算術—幾何平均不等式（AM–GM），都可以由它直接推出；它亦與切比雪夫（Chebyshev）總和不等式密切相關。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 有更多 STEP 風格的不等式練習，而 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis* 則展示了這類關於大小次序的論證如何成為分析學（analysis）的基礎。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。