詳細解答

STEP I 2008，第 2 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 2008，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q2

關鍵思路

這個代換（substitution）的用意，是令平方根變成簡單的 $t-x$。我們不必先解出 x 再對一個繁複的商求導，而是先平方消去根號，再對所得的關係式作隱函數求導（implicit differentiation）。所得的導數（derivative）恰好含有因子 $t-x$，可與被積函數（integrand）中的平方根互相約去，於是積分簡化成 $\int \frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t$。最後一部分則是考驗這個約簡和除法在甚麼情況下才算合理。

解答

導數

設 $R=\sqrt{x^2+2bx+c}$，則 $t-x=R$。兩邊平方，

$$t^2-2tx+x^2=x^2+2bx+c \quad\Longrightarrow\quad t^2-2tx-2bx-c=0.$$

把上式對 t 求導（視 x 為 t 的函數），

$$2t-2x-2t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0, \qquad \text{所以} \qquad (t+b)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t-x.$$

要除以 $t+b$，必須確定它不等於零。由於 $b^2<c$，

$$x^2+2bx+c=(x+b)^2+(c-b^2)>(x+b)^2,$$

所以 $R>|x+b|$，因此

$$t+b=(x+b)+R>(x+b)+|x+b|\geq 0.$$

故此對任何 x 都有 $t+b>0$，而且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t-x}{t+b},$$

這正是所求的結果。（平方後的關係式也可以直接解出：$x=\dfrac{t^2-c}{2(t+b)}$，對此式求導，經過一些代數運算後會得到相同的答案。）

積分

二次式 $x^2+2bx+c$ 對所有 x 都是正數，所以被積函數處處有定義。作代換，並利用 $R=t-x$，

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{t-x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t-x}\cdot\frac{t-x}{t+b}\,\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t=\ln(t+b)+C,\end{aligned}$$

其中因為 $t+b>0$，所以不需要加上絕對值（modulus）符號。約去 $t-x=R$ 是可以的，因為 $R>0$。換回 x，

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(x+b+\sqrt{x^2+2bx+c}\right)+C.$$

你可以用求導來驗證：$x+b+R$ 的導數是 $1+\dfrac{x+b}{R}=\dfrac{R+x+b}{R}$，再除以 $x+b+R$ 便剩下 $\dfrac{1}{R}$。

$b^2=c$ 的情況

這時 $x^2+2bx+c=(x+b)^2$，所以 $\sqrt{x^2+2bx+c}=|x+b|$，被積函數是 $\dfrac{1}{|x+b|}$（在 $x\neq -b$ 時有定義）。

? **想一想** 為甚麼 $\sqrt{(x+b)^2}$ 不能簡單地寫成 $x+b$？

平方根符號所指的是非負的那個根，所以 $\sqrt{(x+b)^2}=|x+b|$，當 $x+b<0$ 時它等於 $-(x+b)$。這個正負號正正決定了公式是否仍然成立。

若 $x+b>0$：直接計算，

$$\int\frac{1}{x+b}\,\mathrm{d}x=\ln(x+b)+C.$$

公式給出

$$\ln\left(x+b+(x+b)\right)=\ln 2+\ln(x+b),$$

它與直接計算的答案只相差常數 $\ln 2$。所以結果仍然成立。

若 $x+b<0$：直接計算，

$$\int \frac{1}{-(x+b)}\,\mathrm{d}x = -\ln\big(-(x+b)\big)+C = -\ln|x+b|+C.$$

但公式給出 $\ln\big(x+b+|x+b|\big)=\ln\big((x+b)-(x+b)\big)=\ln 0$，這是沒有定義的。所以結果在這裏不成立。

值得看看推導是在哪一步出錯的。當 $x+b<0$ 時，對任何 x 都有 $t=x-(x+b)=-b$：t 是常數，根本不能用作新的變量，而 $t+b=0$ 正是我們用來作除數的那個量。嚴格不等式（strict inequality）$b^2<c$ 正是保證 $t+b>0$ 的條件。當 $b^2=c$ 時，只剩下非嚴格的不等式 $t+b\geq 0$，而等號恰好在 $x+b\leq 0$ 時成立。

驗算

- 取 $b=0$、$c=1$，結果變成 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C=\operatorname{arsinh}x+C$，即標準結果。
- 數值上，隨機選取 b 和 $c>b^2$，在隨機選取的上下限之間以辛普森法則（Simpson's rule）計算積分，所得的值與對數公式之差吻合，誤差小於 10^{-7}。至於 $b^2=c$ 而 $b=1.3$ 的情況，$\int_{0.5}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{|x+b|}\approx 1.07992$，與公式給出的 $\ln\frac{5.3}{1.8}$ 相符。

常見錯誤

- 寫成 $\ln|t+b|$ 而沒有留意到 $t+b>0$，因而看不出 $b^2=c$ 時出了甚麼問題。
- 在最後一部分把 $\sqrt{(x+b)^2}=x+b$ 當作成立，以致完全掩蓋了 $x+b<0$ 時公式失效的情況。

STEP 之外

代換 $t=x+\sqrt{x^2+2bx+c}$ 是歐拉代換（*Euler's substitutions*）的其中一種，這類代換能把任何由 x 和 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 組成的有理函數（rational function）的積分，化為 t 的有理函數的積分。最後一部分說明了為甚麼變量代換（change of variable）需要新變量平滑地、而且一對一（one-to-one）地依賴於舊變量：當 t 是常數時，這個方法便完全失效。Bartle 與 Sherbert 所著的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）對變量代換定理有嚴謹的表述，並精確地列明了這些假設。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。