詳細解答

STEP I 2008，第 13 題

概率與統計 • 環形排列

> **STEP I 2008，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q13

關鍵思路

在圓桌上，只有各人之間的相對位置才重要，所以我們固定其中一人的座位，再把其餘五人排在他周圍。這樣共有 $5! = 120$ 種等可能的排列（arrangement），而每個概率（probability）都是在 120 種之中點算所得的比例。必須相鄰而坐的一對夫婦，可以黏合成一個「組塊」，組塊內部有兩種次序。至於「恰好」和「沒有」的情況，我們可以直接點算，也可以對「第 k 對夫婦相鄰而坐」這些事件（event）運用容斥原理（inclusion–exclusion）。

解答

把三對夫婦記為 A, a; B, b; C, c。所有人沿桌邊同時移動一個位置，各人之間的相對座次並沒有改變。因此我們固定 A 的座位，再按順時針方向把其餘五人依次安排在餘下的座位上。這樣共有 $5! = 120$ 種排列，全部等可能。

假如我們改為替座位編號，便會有 $6! = 720$ 種排列。這時每種相對排列都出現 6 次，分別對應 A 可以坐的每一個座位，所以概率不變。

一個有用的一般結果：把 n 件物件排成一個圓圈，共有 $(n-1)!$ 種排法（先固定一件物件，再排列其餘的）。

第 (i) 部分

如果每對夫婦都相鄰而坐，就把每對夫婦黏合成一個組塊。這樣圓桌旁共有 3 個組塊，排法有 $(3-1)! = 2$ 種。在每個組塊內，丈夫可以坐在妻子的任何一邊，所以有 $2^3 = 8$ 種選擇。因此

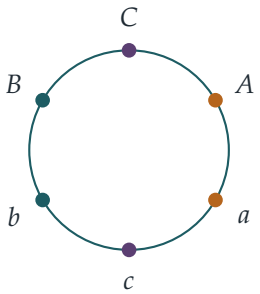
$$\mathrm{P}(\text{三對夫婦全部相鄰}) = \frac{2 \times 8}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15},$$

正如所求。

第 (ii) 部分

首先選出哪一對夫婦不相鄰，共有 3 種選擇。假設是 C, c，即 A, a 和 B, b 各自相鄰，但 C 和 c 不相鄰。

把 Aa 和 Bb 黏合成組塊。現在圓桌旁有 4 個單位：Aa, Bb, C, c，排法有 $3! = 6$ 種。固定 C，再看 c 可以落在這個 4 單位圓圈的其餘三個位置中的哪一個。其中兩個位置上 c 與 C 相鄰，另一個位置上 c 則在正對面。所以在這 6 種排列中，C 和 c 分開的恰好有 $6/3 = 2$ 種。在這些排列中，C 與 c 之間的兩個空隙各由一個組塊填滿，如圖所示：



想一想 為甚麼這比看起來簡單？

當 C 與 c 相對而坐時，餘下的自由度只有哪個組塊坐在哪一邊（2 種），以及每個組塊內部的次序（$2 \times 2 = 4$ 種）。這樣共有 $2 \times 4 = 8$ 種排列。把分開的那對夫婦的三種選擇全部計算在內，

$$\mathrm{P}(\text{恰好兩對夫婦相鄰}) = \frac{3 \times 8}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

第 (iii) 部分

設 E_k 為第 k 對夫婦相鄰而坐的事件，其中 $k = 1, 2, 3$。我們在 120 種排列之中點算每一類排列的數目。

- $|E_1|$：把第 1 對夫婦黏合成一個組塊。圓桌旁便剩下 5 個單位，所以有 $4! = 24$ 種排列，每種有 2 種內部次序，合共 48 種。
- $|E_1 \cap E_2|$：兩個組塊加上兩個人，共 4 個單位。排列有 $3! = 6$ 種，內部次序有 $2^2 = 4$ 種，合共 24 種。
- $|E_1 \cap E_2 \cap E_3| = 16$，由第 (i) 部分得出。

根據對稱性（symmetry），無論選取哪幾對夫婦，以上數目都相同。由容斥原理，至少

有一對夫婦相鄰的排列數目是

$$|E_1 \cup E_2 \cup E_3| = 3(48) - 3(24) + 16 = 144 - 72 + 16 = 88.$$

所以有 $120 - 88 = 32$ 種排列沒有任何夫婦相鄰，而

$$\mathrm{P}(\text{沒有丈夫與自己的妻子相鄰}) = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}.$$

想一想 第 (ii) 部分的答案可以從同一組數目直接讀出嗎？

可以。每個 $|E_i \cap E_j|$ 所點算的，是恰好只有 i, j 這兩對相鄰的排列，再加上三對全部相鄰的排列。所以恰好兩對夫婦相鄰的排列數目是 $3(24) - 3(16) = 24$，與第 (ii) 部分吻合。

驗算

- 四種情況必須涵蓋全部 120 種排列。恰好一對夫婦相鄰的排列數目是 $3(48) - 2 \cdot 3(24) + 3(16) = 48$，而 $32 + 48 + 24 + 16 = 120$。
- 用電腦窮舉全部 720 種有編號的座次，得出 $0, 1, 2, 3$ 對夫婦相鄰的概率分別為 $\frac{4}{15}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}$。這些結果與上面的答案吻合。
- 合理性檢查：某位妻子的兩個鄰座是從 5 個人中選出的，所以她丈夫坐在她旁邊的概率是 $\frac{2}{5}$。這與 $|E_1|/120 = 48/120$ 一致。

常見錯誤

- 總數用了 6! 種排列，卻把符合條件的座次當作環形排列來點算，或者反過來。分子和分母必須採用同一種點算方式。
- 忘記每個組塊內兩人的次序所帶來的因數 2。
- 在第 (ii) 部分，忘記剔除第三對夫婦也相鄰的排列。若不剔除，$\frac{3\times 24}{120} = \frac{3}{5}$ 就大得太多了。

STEP 之外

這是*夫婦入座問題*（*ménage problem*）的縮影。經典版本還要求男女相間而坐，而它的一般答案（Touchard 公式）正是來自這一類容斥原理的運用。在我們這個不設限制的版本中，若有 n 對夫婦，相鄰而坐的夫婦對數的期望值（expected value）是 $n \cdot \frac{2}{2n-1} \to 1$。

沒有任何夫婦相鄰的概率趨向 e^{-1}，與著名的錯排（derangement）極限一模一樣。在男女相間的 ménage 版本中，這個概率則趨向 e^{-2}。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）對容斥原理和這類極限有很好的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。