詳細解答

STEP I 2008，第 11 題

力學 • 極限摩擦力平衡

STEP I 2008，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/08-s1-q11

關鍵思路

由於 $\angle P_1OP_2$ 是直角，半徑 OP_2 平行於 P_1 處的切線（tangent），而半徑 OP_1 則平行於 P_2 處的切線。因此，只要沿這兩條半徑的方向分解（resolve）各力，每條方程便只涉及一個法向反作用力（normal reaction）和一個摩擦力（friction）。再加上一條對 O 取力矩（moment）的方程（兩個法向反作用力對該點都沒有力矩），並在兩端代入極限摩擦（limiting friction）的條件 $F = \mu R$，便得到三條方程，從中可以消去 α 以外的未知量。最後一部分其實是喬裝了的倍角公式（double-angle formulae）。

解答

模型與各力

把桿視為均勻（uniform）的剛性桿，質心（centre of mass）G 位於桿的中點；把兩個環視為輕環，並設金屬線圈的半徑為 a。由於環是輕的，線圈作用於每個環的力會原封不動地傳到桿上，所以可以當作桿在 P_1 和 P_2 兩點直接與線圈接觸。桿的每一端都受到一個沿半徑方向的法向反作用力和一個沿切線方向的摩擦力。

取 O 為原點，x 軸向右，y 軸向上，並設 P_1 在線圈最低點的左方。由於 $\angle P_1OP_2 = 90°$，而 P_1 與向下的鉛垂線成角 α，所以 OP_2 在另一側與該鉛垂線成角 $90° - \alpha$：

$$P_1 = a(-\sin\alpha, -\cos\alpha), \qquad P_2 = a(\cos\alpha, -\sin\alpha).$$

因為 $0 < \alpha < 45°$，$\cos\alpha > \sin\alpha$，所以 P_1 確實比 P_2 低，而且兩點都在 O 的下方。

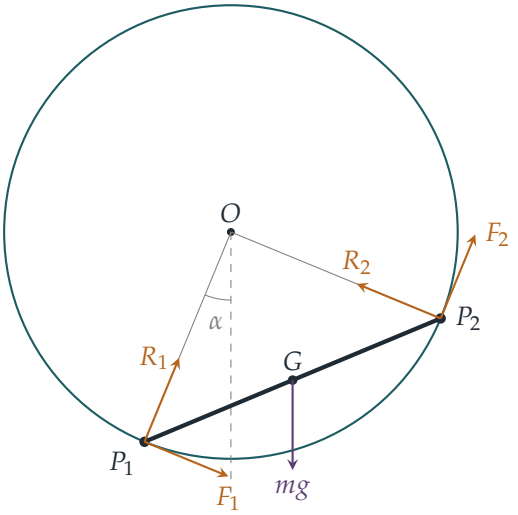
中點為 $G = \frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha, -\cos\alpha - \sin\alpha)$，位於通過 O 的鉛垂線的*右方*。因此重量對 O 的力矩是順時針方向的，桿即將沿線圈順時針滑動（P_2 向下移，P_1 向上移）。摩擦力

阻礙這個運動，所以它在兩端都沿逆時針方向作用：在 P_1 處沿線圈向下，在 P_2 處沿線圈向上。

設 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 分別為由 P_1 和 P_2 指向 O 的單位向量（unit vector）：

$$\mathbf{u}_1 = (\sin\alpha, \cos\alpha), \qquad \mathbf{u}_2 = (-\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0.$$

P_1 處的逆時針切線方向是 $-\mathbf{u}_2$，而 P_2 處的則是 $\mathbf{u}_1$。設法向反作用力（指向 O）為 R_1, R_2，摩擦力為 F_1, F_2。



平衡方程

重量 mg 鉛垂向下作用，所以它沿 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 方向的分量分別是 $-mg\cos\alpha$ 和 $-mg\sin\alpha$。

沿 $\mathbf{u}_1$ 方向（即沿 P_1O）分解：R_1 和 F_2 有貢獻，而 R_2 和 F_1 則與這個方向垂直。所以

$$R_1 + F_2 = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

沿 $\mathbf{u}_2$ 方向（沿 P_2O）分解：R_2 的貢獻是 $+R_2$，而 F_1 指向 $-\mathbf{u}_2$ 方向，貢獻是 $-F_1$。所以

$$R_2 - F_1 = mg\sin\alpha. \tag{2}$$

對 O 取力矩：兩個法向反作用力都通過 O。每個摩擦力都沿切線方向，與 O 的距離為 a，產生逆時針力矩 aF_1 和 aF_2。重量的作用線與 O 的水平距離為 $\frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$，力矩為順時針方向。因此

$$F_1 + F_2 = \tfrac{1}{2}mg(\cos\alpha - \sin\alpha). \tag{3}$$

極限摩擦與 $\tan\alpha$

桿的兩端都處於即將滑動的狀態，所以 $F_1 = \mu R_1$ 及 $F_2 = \mu R_2$。記 $c = \cos\alpha$，$s = \sin\alpha$，方程 (1) 和 (2) 變成

$$R_1 + \mu R_2 = mgc, \qquad -\mu R_1 + R_2 = mgs,$$

其解為

$$R_1 = \frac{mg(c - \mu s)}{1 + \mu^2}, \qquad R_2 = \frac{mg(s + \mu c)}{1 + \mu^2}.$$

當 μ 很小時（這裏必然如此，見下文），兩者皆為正數，所以反作用力確實如圖所示指向 O。現在 (3) 表示 $\mu(R_1 + R_2) = \frac{1}{2}mg(c - s)$，即

$$\begin{aligned} 2\mu(c - \mu s + s + \mu c) &= (1 + \mu^2)(c - s) \\ c\,(2\mu + 2\mu^2 - 1 - \mu^2) + s\,(2\mu - 2\mu^2 + 1 + \mu^2) &= 0 \\ s\,(1 + 2\mu - \mu^2) &= c\,(1 - 2\mu - \mu^2). \end{aligned}$$

兩邊除以 $c\,(1 + 2\mu - \mu^2)$（它不等於零，因為 $c > 0$，而 $\tan\alpha > 0$ 迫使 μ 必須很小，這一點稍後便會看到），得

$$\tan\alpha = \frac{1 - 2\mu - \mu^2}{1 + 2\mu - \mu^2},$$

這正是所求的結果。

想一想 我們怎樣知道摩擦力是沿逆時針方向而不是順時針方向作用？

重量對 O 的力矩是順時針方向的，因為 G 在 O 的右方，而法向反作用力對 O 沒有力矩。所以必須單靠摩擦力提供逆時針方向的力矩；若沒有摩擦力，桿便會順時針滑動。假如你把摩擦力畫成相反方向，整個運算過程會完全一樣，只是 μ 換成了 $-\mu$，結果得出 $\tan\alpha > 1$，與 $\alpha < 45^\circ$ 矛盾。

桿的傾角

由 P_1 到 P_2 的向量是 $a(\cos\alpha + \sin\alpha,\ \cos\alpha - \sin\alpha)$，它的兩個分量都是正數。所以桿與水平線所成的銳角 θ 滿足

$$\tan\theta = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \tan(45^\circ - \alpha),$$

而由於 $0 < 45^\circ - \alpha < 45^\circ$，我們得到 $\theta = 45^\circ - \alpha$。

現在把 $\mu = \tan\lambda$ 代入 $\tan\alpha$ 的公式，並把分子和分母同乘以 $\cos^2\lambda$：

$$\tan\alpha = \frac{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) - 2\sin\lambda\cos\lambda}{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) + 2\sin\lambda\cos\lambda} = \frac{\cos 2\lambda - \sin 2\lambda}{\cos 2\lambda + \sin 2\lambda} = \frac{1 - \tan 2\lambda}{1 + \tan 2\lambda} = \tan(45^\circ - 2\lambda).$$

由於 $0 < \lambda < 22.5^\circ$，角 $45^\circ - 2\lambda$ 嚴格介乎 0° 與 45° 之間，α 亦然。正切函數在這個區間上是一對一（one-to-one）的，所以 $\alpha = 45^\circ - 2\lambda$。因此

$$\theta = 45^\circ - \alpha = 2\lambda,$$

這正是我們要證明的。（這也解釋了條件 $\lambda < 22.5^\circ$，即 $\mu < \sqrt{2} - 1$ 的由來：它恰好就是令 $\tan\alpha > 0$ 的條件。）

驗算

- 當 $\mu = 0$（光滑線圈）時，我們得到 $\tan\alpha = 1$，所以 $\alpha = 45^\circ$，桿呈水平，這是桿在光滑圓上能夠靜止的唯一位置。
- 當 $\mu = 0.2$ 時：$\tan\alpha = 0.56/1.36$，所以 $\alpha \approx 22.38^\circ$，而 $\theta = 45^\circ - \alpha \approx 22.62^\circ$，與 $2\arctan 0.2 \approx 22.62^\circ$ 吻合。
- 數值驗證：隨機選取 10^4 組 $\mu \in (0, \sqrt{2}-1)$、a 和 m 的值，把上述 R_1, R_2, F_1, F_2 代入完整的向量方程，所得的合力和力矩皆為零（誤差約為 10^{-14}），並且 $R_1, R_2 > 0$ 及 $\theta = 2\lambda$。

常見錯誤

- 沿水平和鉛垂方向分解。這樣做是可行的，但每條方程都會包含全部四個力；沿兩條互相垂直的半徑分解則簡潔得多。
- 把其中一端摩擦力的方向弄錯。兩個環沿圓周滑動的方向相同，所以兩端的摩擦力都是逆時針方向的。
- 忘記了 $\theta = 45^\circ - \alpha$ 需要略加說明：弦垂直於 $\angle P_1OP_2$ 的角平分線。

STEP 之外

這題還有一個更巧妙的幾何看法：在極限摩擦的情況下，每一端的總反作用力與半徑成角 λ，而一個在三個力作用下處於平衡（equilibrium）的物體，這三個力必須共點（concurrent），由此可直接推出 $\theta = 2\lambda$。這個「摩擦角」（angle of friction）的概念，以及摩擦力其實是不等式 $|F| \le \mu R$ 而不是等式這一事實，正是處理多個接觸點的靜力學問題的起點；在這類問題中，你必須問哪些接觸點會先滑動。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種嚴謹的態度處理摩擦力和剛體平衡。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。