詳細解答

STEP I 2008，第 10 題

力學 • 拋體運動

> **STEP I 2008，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q10

關鍵思路

重力只沿鉛垂方向作用，所以水平速度 $V\cos\alpha$ 始終不變，射程（range）就是 $V\cos\alpha$ 乘以總飛行時間（time of flight）。飛行時間完全由鉛垂方向的運動決定，而這段運動可分成三個階段：向上穿過底層、在高度 h 以上的一段往返，以及向下穿過底層返回地面。每個階段都是勻加速（constant acceleration）問題，而大部分工夫都可以交給對稱性（symmetry）代勞。

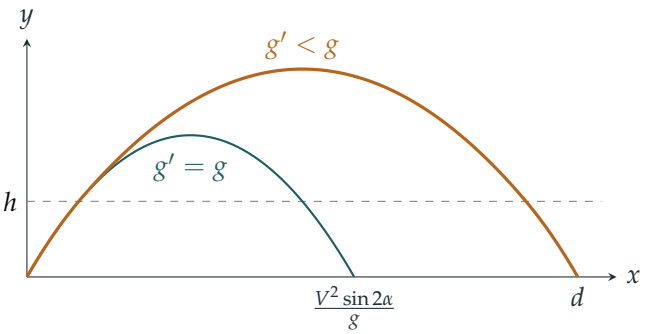
解答

我們把粒子（particle）看成一個質點，不計空氣阻力，在平地上方的一個鉛垂平面內運動。取 x 軸為水平方向，y 軸鉛垂向上，原點設在拋射點。

草圖

在高度 h 以下，兩條軌跡（trajectory）服從完全相同的方程，所以在該處兩者重合。條件 $V^2\sin^2\alpha > 2gh$ 表示初始的鉛垂動能（kinetic energy）足以在加速度 g 之下升過高度 h，所以粒子確實會越過 $y = h$。

在 h 以上，$g' < g$ 的情況重力較弱，鉛垂速率減少得較慢：粒子升得更高，在上面逗留得更久，描出一條較扁、較闊的拋物線（parabola）。速度在 $y = h$ 處連續（只有加速度出現跳躍），所以兩段弧線平滑相接，沒有尖角，但曲率（curvature）會突然改變。下降時，粒子重新進入底層，其速率和角度與離開時相同（由頂部弧線的對稱性可知），而最後一段弧線正是第一段的鏡像。因此 $g' < g$ 的路徑落在更遠的地方。



射程

初速度的鉛垂分量（vertical component）為 $V\sin\alpha$，而當 $y<h$ 時加速度為 $-g$。

第 1 階段：上升至高度 h。設 w 為粒子到達 $y=h$ 時的（向上）鉛垂速率。由 $v^2=u^2+2as$，

$$w^2=V^2\sin^2\alpha-2gh=\sin^2\alpha\left(V^2-2gh\operatorname{cosec}^2\alpha\right)=V'^2\sin^2\alpha,$$

所以 $w=V'\sin\alpha$；這裏取正根，因為 $\sin\alpha>0$，而且粒子仍在上升。（題目給出的條件正好保證 V' 是正實數。）由 $v=u+at$，所需時間為

$$t_1=\frac{V\sin\alpha-V'\sin\alpha}{g}=\frac{(V-V')\sin\alpha}{g}.$$

第 2 階段：在高度 h 以上。此時粒子從 $y=h$ 出發，以速率 w 向上運動，加速度為 $-g'$。當 $wt-\frac{1}{2}g't^2=0$ 時，它回到 $y=h$，即經過時間

$$t_2=\frac{2w}{g'}=\frac{2V'\sin\alpha}{g'},$$

之後，而這時它正以鉛垂速率 w 向下運動。

想一想 為甚麼最後一個階段所需的時間與第一個階段相同？

在第 3 階段，粒子從 $y=h$ 出發，以速率 w 向下運動，加速度為向下的 g，一直落到 $y=0$。這正是把第 1 階段在時間上倒過來播放：勻加速運動是可逆的，而第 1 階段是在同樣的加速度下，由 $y=0$、速率 $V\sin\alpha$ 運動到 $y=h$、速率 w。所以粒子經過時間 $t_3=t_1$ 後到達地面，鉛垂速率為 $V\sin\alpha$。（直接計算：鉛垂速率以 g 的變率由 w 增至 $V\sin\alpha$，需時 $(V\sin\alpha-w)/g$。）

因此總飛行時間為

$$T=2t_1+t_2=2\sin\alpha\left(\frac{V-V'}{g}+\frac{V'}{g'}\right).$$

由於沒有水平方向的力，水平速度自始至終保持為 $V\cos\alpha$，於是

$$\begin{aligned} d = V\cos\alpha \cdot T &= \left(\frac{V-V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) 2V\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \left(\frac{V-V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) V\sin 2\alpha, \end{aligned}$$

其中用到 $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$。這就是所要求的結果。

驗算

- 若 $g' = g$，括號內的式子變成 V/g，於是 $d = V^2\sin 2\alpha/g$，即我們熟悉的地球上的射程。
- 若 $g' < g$，則 $V'/g' > V'/g$，所以 d 大於均勻重力下的射程，與草圖吻合。
- 若恰好有 $V^2\sin^2\alpha = 2gh$，則 $V' = 0$：粒子剛好觸及 $y = h$，完全感受不到 g'，於是同樣得到 $d = V^2\sin 2\alpha/g$。
- 數值上，取 $V = 10$、$\alpha = 60°$、$g = 10$、$h = 2$ 及 $g' = 5$，可得 $V' = \sqrt{140/3} \approx 6.83$ 及 $d \approx 14.576$；以數值方法逐步模擬這個運動，所得的落點相同，相對誤差在 10^{-5} 以內。（草圖所用的正是這些數值。）

常見錯誤

- 忘記了向下穿過底層的那一段，得出 $t_1 + t_2$ 而不是 $2t_1 + t_2$。
- 把高度 h 處的鉛垂速率當作 V' 而不是 $V'\sin\alpha$：V' 是按 $\operatorname{cosec}\alpha$ 放大了的速率，並不是鉛垂分量本身。
- 在兩段弧線相接處畫出尖角：速度是連續的，所以接合處是平滑的。

STEP 之外

重力隨位置而變，其實是常態而不是例外：真實的重力隨着與行星中心的距離按 $1/r^2$ 減弱，拋體的路徑也因而變成橢圓（ellipse）的弧，而不是拋物線。把一個運動分成若干個力的規律都很簡單的區域，再在邊界上令位置和速度互相銜接，是一種標準技巧；在粒子的折射（refraction），以及量子力學（quantum mechanics）中的階躍勢（step potential）問題裏，都會再次用到。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）既講解勻加速運動的各種工具，也討論平方反比（inverse-square）重力下的軌道運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。