詳細解答

STEP I 2008，第 1 題

純數學 • 反證法

> **STEP I 2008，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q1

關鍵思路

有理數（rational number）在加法、減法、乘法以及除以非零數的運算下是封閉（closed）的。本題幾乎所有結論都源自這一個事實：如果某些數是有理數，那麼用這些運算由它們構造出來的任何數也是有理數。在最後部分，假設四個數之中有兩個是有理數，把它們巧妙地組合起來，從而得出一個題目已告訴我們是無理數（irrational number）的數。

解答

定義

若實數 x 可以寫成 $x = \frac{m}{n}$，其中 m 和 n 為整數且 $n \neq 0$，則稱它為*有理數*。若一個實數不是有理數，即不存在整數 m 和 $n \neq 0$ 使得 $x = \frac{m}{n}$，則稱它為*無理數*。

命題 A

用反證法（proof by contradiction）：假設 pq 是無理數，但 p 和 q 都不是無理數。那麼兩者都是有理數，所以可以寫成 $p = \frac{a}{b}$ 和 $q = \frac{c}{d}$，其中 a, b, c, d 為整數且 $b, d \neq 0$。於是

$$pq = \frac{ac}{bd},$$

其中 ac 和 bd 都是整數，而且 $bd \neq 0$，因為 b 和 d 都不是零。所以 pq 是有理數，這與我們的假設矛盾。因此 p 和 q 之中至少有一個是無理數。

命題 B

同樣地，假設 $p+q$ 是無理數，但 $p=\frac{a}{b}$ 和 $q=\frac{c}{d}$ 都是有理數，其中 $b,d\neq 0$。於是

$$p+q=\frac{ad+bc}{bd},$$

這是兩個整數之比，而且分母不為零，所以 $p+q$ 是有理數。這個矛盾說明 p 和 q 之中至少有一個是無理數。

命題 C

取 $p=\sqrt{2}$ 和 $q=-\sqrt{2}$。兩者都是無理數，但 $p+q=0=\frac{0}{1}$ 是有理數，所以 C 不成立。

為完整起見，以下說明為何 $\sqrt{2}$ 是無理數。若 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ 為最簡分數（lowest terms），則 $m^2=2n^2$，所以 m^2 是偶數，因而 m 也是偶數（奇數的平方是奇數）。設 $m=2k$，便得 $n^2=2k^2$，所以 n 也是偶數，這與最簡分數的假設矛盾。至於 $-\sqrt{2}$ 也是無理數，因為若 $-\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，則 $\sqrt{2}=\frac{-m}{n}$。

最後部分

題目告訴我們 π、π^2 和 $\mathrm{e}\pi$ 都是無理數（我們只需要這三個事實）。以下兩個簡單的觀察會反覆用到：

- 若 r 和 s 是有理數，則 $r+s$、$r-s$、rs 也是有理數，而 r/s 在 $s\neq 0$ 時亦然（論證與 A 和 B 所用的完全相同）；
- 因此，若 r 是有理數，則 $\frac{1}{2}r$ 也是有理數，因為 $\frac{1}{2}$ 是有理數。

另外留意 $\pi+\mathrm{e}>0$ 和 $\pi-\mathrm{e}>0$，因為 $\pi>3>\mathrm{e}>0$；特別地，兩者都不是零。

用反證法：假設以下四個數

$$\pi+\mathrm{e},\quad \pi-\mathrm{e},\quad \pi^2-\mathrm{e}^2,\quad \pi^2+\mathrm{e}^2$$

之中有兩個是有理數。共有六種可能的配對，我們逐一排除。

1. $\pi+\mathrm{e}$ 和 $\pi-\mathrm{e}$ 爲有理數。兩者相加，2π 是有理數，所以 π 是有理數。矛盾。
2. $\pi^2-\mathrm{e}^2$ 和 $\pi^2+\mathrm{e}^2$ 爲有理數。兩者相加，$2\pi^2$ 是有理數，所以 π^2 是有理數。矛盾。
3. $\pi+\mathrm{e}$ 和 $\pi^2+\mathrm{e}^2$ 爲有理數。把前者平方，$(\pi+\mathrm{e})^2$ 是有理數，而

   $$2\mathrm{e}\pi=(\pi+\mathrm{e})^2-(\pi^2+\mathrm{e}^2),$$

   所以 $\mathrm{e}\pi$ 是有理數。矛盾。

4. $\pi - \mathrm{e}$ 和 $\pi^2 + \mathrm{e}^2$ 爲有理數。同理，

$$2\mathrm{e}\pi = (\pi^2 + \mathrm{e}^2) - (\pi - \mathrm{e})^2$$

是有理數，所以 $\mathrm{e}\pi$ 是有理數。矛盾。

5. $\pi + \mathrm{e}$ 和 $\pi^2 - \mathrm{e}^2$ 爲有理數。由於 $\pi + \mathrm{e} \neq 0$，

$$\pi - \mathrm{e} = \frac{\pi^2 - \mathrm{e}^2}{\pi + \mathrm{e}}$$

是兩個有理數之商，而且分母不為零，所以它是有理數。這樣 $\pi + \mathrm{e}$ 和 $\pi - \mathrm{e}$ 都是有理數，而根據情況 1，這是不可能的。

6. $\pi - \mathrm{e}$ 和 $\pi^2 - \mathrm{e}^2$ 爲有理數。由於 $\pi - \mathrm{e} \neq 0$，

$$\pi + \mathrm{e} = \frac{\pi^2 - \mathrm{e}^2}{\pi - \mathrm{e}}$$

是有理數，於是再次由情況 1 得出矛盾。

想一想 為甚麼在情況 6 中需要 $\pi - \mathrm{e} \neq 0$？

因為不可以除以零：「有理數除以有理數仍是有理數」這一步，只在分母不為零時才成立。假如 $\pi = \mathrm{e}$，則 $\pi^2 - \mathrm{e}^2 = 0$ 是有理數，卻不能告訴我們任何關於 $\pi + \mathrm{e}$ 的資訊。這裏 $\pi - \mathrm{e} \approx 0.42$，所以沒有問題。

每一種配對都導致矛盾，所以四個數之中不可能有兩個同時是有理數。因此其中至多有一個是有理數，這正是所要證明的。

驗算

所用的恆等式很容易用數值驗證：取 $\pi \approx 3.14159$ 和 $\mathrm{e} \approx 2.71828$，可得 $(\pi + \mathrm{e})(\pi - \mathrm{e}) \approx 5.85987 \times 0.42331 \approx 2.48055 \approx \pi^2 - \mathrm{e}^2$，以及 $(\pi + \mathrm{e})^2 - (\pi^2 + \mathrm{e}^2) \approx 17.0795 \approx 2\mathrm{e}\pi$。也數一數配對的數目：四個數共有 $\binom{4}{2} = 6$ 種配對，而六種都已處理。留意我們從未用過 e 和 e^2 是無理數這一點；根據對稱性，在情況 1 和 2 中本來也可以用它們來代替 π 和 π^2。

常見錯誤

- 誤證了 A 或 B 的逆命題（converse）。A 說的是「乘積為無理數 $\Rightarrow$ 其中一個因數為無理數」；它的逆命題並不成立（$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$）。
- 除以 $\pi \pm \mathrm{e}$ 時沒有指出它不為零。

- 把命題 C 當作成立來使用，例如聲稱「π 和 e 是無理數，所以 $\pi + e$ 是無理數」。事實上，$\pi + e$ 是否無理數，至今仍是一個未解決的問題（open problem）。

STEP 之外

這裏用到的封閉性質，說明有理數構成一個域（field）：在這樣的集合裏，你可以進行加、減、乘、除（除以零除外）而不會離開這個集合。域是大學一年級代數課程的核心對象，而「$\pi + e$ 是否無理數？」這類問題則通向超越數論（transcendence theory），這個領域中已知的結果少得驚人。代數方面，可以讀 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）；至於有理數與無理數的數論，可以讀 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算術）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。