詳細解答

STEP III 2007，第 9 題

力學 • 簡諧運動

STEP III 2007，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/07-s3-q9

關鍵思路

彈簧對兩顆小珠的拉力或推力大小相等、方向相反，而且沿同一直線作用；圓環的反作用力（reaction）則沿徑向，所以對圓心的總角動量（angular momentum）一直保持為零：兩顆小珠的運動互為鏡像。這樣整個問題就簡化為只有一個坐標，再由能量守恆（conservation of energy）便得出關於 θ 的簡諧運動（simple harmonic motion，簡稱 SHM）。要留神的是，θ 是銳角的半角：如果兩顆小珠分開得夠遠，越過了直徑的兩端，能量的公式就會改變形式，這時的運動必須由兩段 SHM 拼合而成。

解答

建立模型

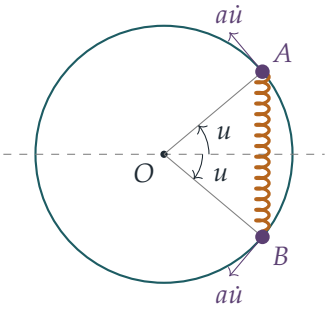
把小珠看成質點（particle），圓環固定而光滑（smooth），彈簧為輕（light）彈簧。作用於小珠的力有：重力和圓環反作用力的垂直分量（兩者互相抵消）、反作用力的水平分量（由於圓環光滑，它沿半徑方向），以及彈簧的力。彈簧作用於 A 的力和彈簧作用於 B 的力大小相等、方向相反，並且沿同一直線 AB 作用，所以它們對通過 O 的垂直軸的總力矩（moment）為零；徑向的力對該軸則完全沒有力矩。因此，對該軸的總角動量守恆，而由於小珠從靜止開始，總角動量為零。

從一條固定的半徑起沿圓環量度角度，設 A 和 B 所在的角度分別為 ϕ_A 和 ϕ_B。角動量為零即 $ma^2(\dot{\phi}_A + \dot{\phi}_B) = 0$，所以 $\phi_A + \phi_B$ 是常數。選取參考半徑，使它平分初始的角 AOB；那麼在任何時刻都有

$$\phi_A = u, \qquad \phi_B = -u,$$

其中只有一個坐標 u，而開始時 $u = \beta$。每顆小珠的速率都是 $a\dot{u}$，所以動能（kinetic

energy）是 $2\cdot\frac{1}{2}ma^2\dot{u}^2 = ma^2\dot{u}^2$。



當 $0 < u \le \frac{\pi}{2}$ 時，角 AOB 等於 $2u$；但如果 u 超過 $\frac{\pi}{2}$，小珠便已越過直徑的兩端，這時角 AOB 等於 $2\pi - 2u$。所以

$$\theta = u \quad (0 < u \le \tfrac{\pi}{2}), \qquad \theta = \pi - u \quad (\tfrac{\pi}{2} \le u < \pi).$$

小珠在 $u = \beta$ 處由靜止釋放，由能量守恆得

$$ma^2\dot{u}^2 + mk^2a^2(\theta-\alpha)^2 = mk^2a^2(\beta-\alpha)^2, \qquad \text{所以} \qquad \dot{u}^2 = k^2[(\alpha-\beta)^2 - (\theta-\alpha)^2].$$

「處於壓縮狀態」(in compression）是指彈簧比它的自然長度（natural length）短。能量在 $\theta = \alpha$ 時最小，所以那就是自然長度的位置；而長度 $2a\sin\theta$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上隨 θ 增加而增加，因此 $0 < \beta < \alpha$。

$u \le \frac{\pi}{2}$ 時的運動

這時 $\theta = u$，把能量方程對 t 求導，再除以 $2\dot{u}$（只要小珠在運動，這一步就成立，其餘時刻則由連續性補足），得

$$\ddot{\theta} = -k^2(\theta - \alpha).$$

這是以 $\theta = \alpha$ 為中心、角頻率（angular frequency）為 k 的 SHM。由於小珠在 $\theta = \beta$ 處從靜止出發，

$$\theta - \alpha = -(\alpha - \beta)\cos kt,$$

所以兩顆小珠互相遠離，如果中途沒有任何事情打斷，便會在 $t = \frac{\pi}{k}$ 時到達 $\theta = 2\alpha - \beta$。一切都取決於 $2\alpha - \beta$ 是否小於 $\frac{\pi}{2}$，也就是取決於 β 與 $2\alpha - \frac{\pi}{2}$ 的大小關係。這個臨界值落在 $(0, \alpha)$ 之內，正是因為 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$，所以以下三種情況都有可能出現。

情況 1： $2\alpha - \frac{\pi}{2} < \beta < \alpha$

這時 $2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$，所以小珠永遠不會到達直徑的兩端，全程都有 $\theta = u$，運動是在 $\theta = \beta$ 與 $\theta = 2\alpha - \beta$ 之間的純粹 SHM。週期（period）為

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

情況 2： $0 < \beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

這時 θ 在 SHM 掉頭之前就到達 $\frac{\pi}{2}$，所需時間 t_1 滿足

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = -(\alpha - \beta)\cos kt_1, \qquad \text{所以} \qquad \cos kt_1 = -\lambda, \quad \text{其中} \lambda = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}.$$

由於 $\alpha < \frac{\pi}{2}$ 且 $\beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$，我們有 $0 < \lambda < 1$。因此

$$kt_1 = \pi - \arccos\lambda = \frac{\pi}{2} + \arcsin\lambda.$$

在這一刻，能量方程給出 $\dot{u}^2 = k^2[(\alpha - \beta)^2 - (\frac{\pi}{2} - \alpha)^2] > 0$，所以兩顆小珠仍在互相遠離，並會繼續越過直徑的兩端。

> ? **想一想** 小珠越過直徑的兩端之後，會發生甚麼事？

當 $u \geq \frac{\pi}{2}$ 時，我們有 $\theta = \pi - u$，所以能量方程變成

$$\dot{u}^2 = k^2[(\alpha - \beta)^2 - (u - (\pi - \alpha))^2],$$

這是 u 以 $u = \pi - \alpha$ 為中心的 SHM，角頻率同樣是 k。它是到達直徑之前那段運動關於 $u = \frac{\pi}{2}$ 的鏡像。所以小珠再用一段時間 t_1，便在 $u = \pi - \beta$ 處靜止（那裏再次有 $\theta = \beta$，只是小珠現在位於 O 的另一側），然後沿原路走完全程回到 $u = \beta$。經過四個這樣的階段後，小珠回到起始位置，所以運動的週期是

$$T = 4t_1 = \frac{4}{k}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}\right) = \frac{2}{k}\left(\pi + 2\arcsin\frac{\pi - 2\alpha}{2(\alpha - \beta)}\right).$$

（至於角 θ 本身，它並不記錄小珠在 O 的哪一側，所以每隔 $2t_1$ 就重複一次。）

情況 3： $\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

這時 θ 在 $t = \frac{\pi}{k}$ 到達 $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$，而 SHM 恰好在這一刻令小珠靜止。這時兩顆小珠位於直徑的兩端，所以彈簧沿 AOB 放置，它作用於每顆小珠的力都沿半徑方向：這個力沒有沿圓環方向的分量，而沿圓環方向也沒有其他力作用。小珠處於平衡（equilibrium）而且靜止，所以會一直留在那裏。因此

$$\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$$

就是不會出現振動的那個值。這與兩個週期的結果吻合：當 β 從下方趨近這個值時，$\lambda \to 1$，情況 2 的週期趨向 $\frac{4\pi}{k}$，即情況 1 週期的兩倍，因為小珠在直徑附近逗留的時間愈來愈長。

驗算

- 取 $k = 1$，$\alpha = \frac{3\pi}{8}$，$\beta = \frac{\pi}{8}$，由於 $2\alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$，這屬於情況 2。於是 $\lambda = \frac{\pi/8}{\pi/4} = \frac{1}{2}$，$\arcsin\lambda = \frac{\pi}{6}$，而 $T = 2(\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{8\pi}{3} \approx 8.378$。

- 我們用數值方法逐步求解兩顆小珠的運動方程（能量寫成兩顆小珠位置的函數，並不假設任何對稱性）。取 $k = 1$，$\alpha = 1.2$，$\beta = 0.5$ 時，小珠在 8.5162 之後回到起點並靜止，而公式給出的是 8.51622；取 $\beta = 1.0$（情況 1）時，週期是 $6.2832 \approx 2\pi$。
- 量綱：k 的單位是 s^{-1}（能量等於 ma^2k^2 乘以角度的平方），所以 $\frac{2\pi}{k}$ 是時間。

常見錯誤

- 把動能寫成 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$：兩顆小珠都在運動，所以動能是 $ma^2\dot{\theta}^2$。漏掉因子 2 會得出錯誤的角頻率 $\sqrt{2}k$。
- 毫無根據地假設小珠對稱地運動：這個結論來自對 O 的角動量守恆，而這需要彈簧作用於每顆小珠的力都沿同一直線 AB。
- 忘記 θ 是銳角，於是在所有情況下都答 $\frac{2\pi}{k}$。

STEP 之外

利用守恆量把兩個質點的系統簡化為一個坐標，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點；在那裏，對稱性（在這題中，是把整個位形繞 O 旋轉）會帶來守恆定律，而諾特定理（Noether's theorem）把這個想法說得精確。情況 2 的運動是在「雙井」（double-well）位勢中的振動，它的週期取決於振幅，並且在能量等於中央勢壘高度之處出現跳躍。想進一步了解守恆定律和振動，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。