詳細解答

STEP III 2007，第 8 題

純數學 • 里卡蒂方程

> **STEP III 2007，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q8

關鍵思路

非線性方程 $(*)$ 是一條里卡蒂方程（Riccati equation）：y^2 項破壞了線性。把 y 寫成 u'/u 的倍數，$y' + y^2$ 便會變成 u''/u，平方項隨之消失，剩下一條關於 u 的線性二階方程。第 (i) 部分的前半已經給了我們這條線性方程的兩個解，所以餘下的工作只是定出常數。至於第 (ii) 部分，我們需要一條新線性方程的兩個解，而線索在於：把 $1 + x$ 中的 x 換成 $-x$，就得到 $1 - x$。

解答

第 (i) 部分

求 a 和 b。當 $u = x$ 時，$u' = 1$，$u'' = 0$，所以需要

$$\mathrm{a}(x) + x\,\mathrm{b}(x) = 0.$$

當 $u = \mathrm{e}^{-x}$ 時，$u' = -\mathrm{e}^{-x}$，$u'' = \mathrm{e}^{-x}$；除以 $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$ 得

$$1 - \mathrm{a}(x) + \mathrm{b}(x) = 0.$$

由第一條方程得 $\mathrm{b} = -\mathrm{a}/x$（其中 $x \neq 0$），再由第二條方程得 $\mathrm{a}(1 + \frac{1}{x}) = 1$。所以

$$\mathrm{a}(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad \mathrm{b}(x) = -\frac{1}{1+x}.$$

（這兩個函數在 $x = 0$ 時亦滿足上述兩個條件。）這條方程是線性而且齊次（homogeneous）的，而 x 與 e^{-x} 並非彼此的倍數，所以通解（general solution）是

$$u = Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

其中 A 和 B 為任意常數。

代換。設 $y = \dfrac{u'}{3u}$，其中 $u \neq 0$。由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{u''}{3u} - \frac{(u')^2}{3u^2} = \frac{u''}{3u} - 3\left(\frac{u'}{3u}\right)^2 = \frac{u''}{3u} - 3y^2.$$

所以 $y' + 3y^2 = \dfrac{u''}{3u}$：平方項剛好完全抵銷，這正是代換中要放入因子 3 的原因。方程 $(*)$ 變成

$$\frac{u''}{3u} + \frac{x}{1+x}\cdot\frac{u'}{3u} = \frac{1}{3(1+x)},$$

乘以 $3u$ 得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{x}{1+x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}u = 0,$$

正如所求。這就是本部分開首的方程，其中的 a 和 b 正是我們剛才求得的。

特解（particular solution）。因此 $u = Ax + B\mathrm{e}^{-x}$，而

$$y = \frac{u'}{3u} = \frac{A - B\mathrm{e}^{-x}}{3(Ax + B\mathrm{e}^{-x})}.$$

想一想 常數有兩個，條件卻只有一個。這會有問題嗎？

不會。把 u 乘以一個非零常數並不會改變 u'/u，所以只有比 $A : B$ 才有影響，而一階方程本來就應該只有一個自由常數。由條件「當 $x = 0$ 時 $y = 0$」得 $A - B = 0$。於是 $B = A \neq 0$（否則 $u \equiv 0$），約去 A 後，

$$y = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{3(x + \mathrm{e}^{-x})}.$$

分母永不為零，因為由 $\mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$ 可得 $x + \mathrm{e}^{-x} \geq 1$。第 (i) 部分至此完成。

第 (ii) 部分

現在 y^2 項的係數是 1，所以我們用 $y = \dfrac{u'}{u}$。與之前完全一樣，

$$y' = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \frac{u''}{u} - y^2,$$

所以 $y' + y^2 = u''/u$。把方程乘以 u，便得到線性方程

$$u'' + \frac{x}{1-x}u' - \frac{1}{1-x}u = 0.$$

這就是把第 (i) 部分的方程中的 x 換成 $-x$ 所得的方程。事實上，若 $v(x) = w(-x)$，其中 w 是第 (i) 部分方程的解，則 $v'(x) = -w'(-x)$ 及 $v''(x) = w''(-x)$，而第 (i) 部分的方程在點 $-x$ 處就是

$$v''(x) + \frac{-x}{1-x}(-v'(x)) - \frac{1}{1-x}v(x) = 0,$$

這正是新的方程。所以由 x 和 e^{-x} 可得出解 $-x$（或乾脆取 x）和 e^{x}。直接驗證：當 $u = x$ 時，$0 + \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 0$；當 $u = \mathrm{e}^{x}$ 時，$\mathrm{e}^{x}(1 + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x}) = \mathrm{e}^{x}(1-1) = 0$。因此

$$u = Ax + B\mathrm{e}^{x}, \qquad y = \frac{u'}{u} = \frac{A + B\mathrm{e}^{x}}{Ax + B\mathrm{e}^{x}}.$$

當 $x = 0$ 時，上式等於 $(A+B)/B$，而它必須等於 2，所以 $A = B$（且 $B \neq 0$）。因此

$$y = \frac{1 + \mathrm{e}^{x}}{x + \mathrm{e}^{x}}.$$

這個解在包含 0、滿足 $x + \mathrm{e}^{x} > 0$ 而且方程有定義的區間上成立，即 $x_0 < x < 1$，其中 $x_0 \approx -0.567$ 是 $x + \mathrm{e}^{x} = 0$ 的根。

驗算

- 當 $x = 0$ 時，第 (ii) 部分的答案給出 $2/1 = 2$；對它求導得 $y'(0) = \frac{1\cdot 1 - 2\cdot 2}{1} = -3$，與方程吻合：$1 - 4 - 0 = -3$。
- 當 $x \to \infty$ 時，第 (i) 部分的答案趨向 0，其表現有如 $\frac{1}{3x}$。這時 $y' \approx -\frac{1}{3x^2}$ 與 $3y^2 \approx \frac{1}{3x^2}$ 互相抵銷，而 $\frac{x}{1+x}y \approx \frac{1}{3(1+x)}$，與 $(*)$ 一致。
- 我們以數值方法解了第 (ii) 部分的方程（由 $y(0) = 2$ 出發，使用龍格－庫塔法（Runge–Kutta)），得到 $y(0.9) = 1.0297654\ldots$，與公式的結果在小數點後 10 位之內相符。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分仍然保留因子 $\frac{1}{3}$：乘數必須與 y^2 的係數配合，所以這裏應該用 $y = u'/u$。
- 試圖只憑一個條件同時定出 A 和 B。其實只有兩者之比才會影響 y。
- 在第 (ii) 部分未經驗證便再次取 e^{-x}：$1 - x$ 中的正負號改變，令它變成 e^{x}。

STEP 之外

形如 $y' + P(x)y^2 + Q(x)y = R(x)$ 的方程稱為里卡蒂方程，而代換 $y = u'/(Pu)$ 總能把它化為一條線性二階方程。反過來說，任何二階線性方程的比 u'/u 都滿足一條里卡蒂方程，這就是為甚麼這類非線性方程在物理學中不斷出現，由量子力學（quantum mechanics）以至控制理論（control theory）都有它們的蹤影。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教材）涵蓋了這個課題，以及線性二階方程的理論（為甚麼兩個獨立的解就能給出通解）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。