詳細解答

STEP III 2007，第 7 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP III 2007，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q7

關鍵思路

題目不容許我們提及「arctan」或「π」，所以每一項事實都必須靠積分內的變數代換（substitution）得出。每個代換都經過挑選，令被積函數（integrand）$1/(1+u^2)$（或 $1/\sqrt{1-u^2}$）變回自己，或變成另一個，只有積分上下限（limits）改變。比較上下限，便得到 t 與 s 各個值之間的等式；而第 (i) 部分的對稱性（symmetry）$u \mapsto 1/u$，正是把這些等式化為 p 的倍數的關鍵。

解答

第 (i) 部分

取 $x > 0$，並設 $u = v^{-1}$，於是 $\mathrm{d}u = -v^{-2}\,\mathrm{d}v$。當 u 由 0 增至 x 時，v 由 ∞ 減至 $1/x$。另外

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+v^{-2}} = \frac{v^2}{v^2+1}.$$

因此

$$t(x) = \int_{\infty}^{1/x} \frac{v^2}{1+v^2}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v,$$

其中負號用來對調上下限。這就是所求的結果。（這個廣義積分（improper integral）收斂（converges），因為被積函數不超過 $1/v^2$。）

以 $1/x$ 代替 x 套用上式，得 $t(1/x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$。加上 $t(x) = \int_0^x \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$，兩個積分範圍便合併成 $[0,\infty)$：

$$t(x) + t(1/x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}p \qquad (x > 0).$$

代入 $x = 1$，得 $2t(1) = \frac{1}{2}p$。

第 (ii) 部分

當 $u \geq 0$ 時，有 $0 \leq y < 1$。兩邊平方，$y^2(1+u^2) = u^2$，所以 $u^2(1-y^2) = y^2$，而

$$u = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

這裏取正根，因為 u 與 y 同號。由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\sqrt{1-y^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}}{1-y^2} = \frac{(1-y^2)+y^2}{(1-y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)^3}},$$

正如所求。

現在代入 $t(x)$。由 $u^2 = y^2/(1-y^2)$ 得

$$1 + u^2 = \frac{1}{1-y^2},$$

所以

$$\frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = (1-y^2)\cdot\frac{1}{(1-y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

映射 $u \mapsto y$ 是遞增（increasing）的（它的反函數的導數為正），而且 $u = 0 \mapsto y = 0$，$u = x \mapsto y = x/\sqrt{1+x^2}$，後者小於 1。所以

$$t(x) = \int_0^{x/\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = s\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

取 $x = 1$，並利用第 (i) 部分，上式即 $s(\frac{1}{\sqrt{2}}) = t(1) = \frac{1}{4}p$。

第 (iii) 部分

記 $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$，於是 $z = \dfrac{u+a}{1-au}$。在 $0 \leq u \leq a$ 上有 $au \leq \frac{1}{3}$，所以分母保持為正，z 在該範圍內是 u 的光滑函數（smooth function）。求導得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

想一想 為甚麼這個代換會令 $1/(1+u^2)$ 保持不變？

通分計算 $1+z^2$。交叉項 $\mp 2au$ 互相抵消：

$$1 + z^2 = \frac{(1-au)^2 + (u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1 + a^2u^2 + u^2 + a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

兩式相除，

$$\frac{1}{1+z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{1+u^2},$$

所以被積函數不變，只有上下限移動。（這背後其實是正切的複角公式（tangent addition formula），但我們用不着它。）當 $u = 0$ 時，$z = a = \frac{1}{\sqrt{3}}$。當 $u = a$ 時，

$$z = \frac{2/\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3}.$$

因此

$$t(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

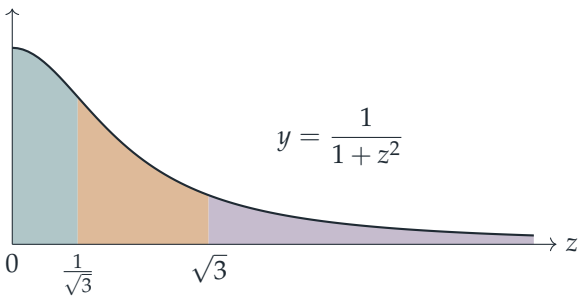
最後一步，把範圍 $[0, \infty)$ 在 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 和 $\sqrt{3}$ 處分開：

$$\tfrac{1}{2}p = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

第一段按定義就是 $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$，第二段按剛才證明的結果也是 $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$。由第 (i) 部分取 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$，第三段是 $\int_{1/x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = t(x) = t(\frac{1}{\sqrt{3}})$，同樣如此。因此

$$3\,t(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \tfrac{1}{2}p.$$

下圖顯示這三段：$1/(1+z^2)$ 之下由 0 至 ∞ 的面積，分成三個面積相等的區域。



驗算

以數值方法（辛普森法則（Simpson's rule））計算，$t(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 0.5235988$，$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} \approx 0.5235988$，而 $p \approx 3.1415927$，所以 $3t(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 1.5707963 \approx \frac{1}{2}p$。同樣，$s(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx t(1) \approx 0.7853982 \approx \frac{1}{4}p$。當然，$p$ 其實就是 π，而這些結果說的是 $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$，$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$；你可以用這些來驗算，但不可寫在答案裏。

常見錯誤

- 忘記 $u = 1/v$ 會把積分方向倒轉；$\mathrm{d}u$ 中的負號正好把上下限的次序還原。

- 在第 (iii) 部分，做完代換便停下來：由 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 至 $\sqrt{3}$ 的積分只是三段相等部分的其中一段，而 $\sqrt{3}$ 之後的那一段需要用到第 (i) 部分。
- 沒有檢查在積分範圍內 $1 - au \neq 0$；這裏 $au \leq \frac{1}{3}$，所以代換成立。

STEP 之外

這道題讓我們一窺分析學家如何嚴格地定義三角函數（trigonometric functions）：先把 $\arctan x$ 定義為 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$，再把 π 定義為它在無窮遠處的極限（limit）的兩倍，然後靠這類代換推導出所有性質，完全不用幾何。第 (iii) 部分的代換其實是 tan 的複角公式的化身，用同樣的方法可以證明：當 $xy < 1$ 時，$t(x) + t(y) = t\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$。Abbott 的 *Understanding Analysis* 說明了如何利用積分和冪級數（power series）為這類定義奠定穩固的基礎。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。