詳細解答

STEP III 2007，第 6 題

純數學 • 複數與圓

> **STEP III 2007，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q6

關鍵思路

在以原點為圓心、半徑為 a 的圓上，取共軛（conjugation）與反演（inversion）是同一回事：$pp^* = a^2$，所以 $p^* = a^2/p$。單憑這一點，題目中每一個共軛都可化為普通的分式，恆等式（identity）隨即得出。至於垂直，判別方法是兩條弦所對應的向量之比為純虛數（purely imaginary）。利用恆等式，這個判別法便化為一個簡單的乘積條件。對於多邊形，這個乘積條件就是一個遞推關係（recurrence）：一旦選定 B_1，其餘每一個 B_k 都隨之確定，唯一的問題是這條鏈繞回 B_1 時能否閉合。

解答

恆等式

由於 P 在圓上，$|p| = a$，所以 $pp^* = a^2$，即 $p^* = a^2/p$；同理 $q^* = a^2/q$。因此

$$p^* - q^* = \frac{a^2}{p} - \frac{a^2}{q} = \frac{a^2(q-p)}{pq} = -\frac{a^2(p-q)}{pq}.$$

因為 $p \neq q$（而且由 $a > 0$ 知 $p, q \neq 0$），上式不等於零，所以可以移項得

$$pq = -a^2 \, \frac{p-q}{p^* - q^*},$$

這正是所求。

互相垂直的弦

弦（chord）PQ 的方向由複數 $p-q$ 給出，而 RS 的方向由 $r-s$ 給出。兩個非零複數互相垂直，當且僅當它們的比

$$w=\frac{p-q}{r-s}$$

是純虛數，因為這個比的輻角（argument）就是兩者之間的夾角。

> **想一想** 怎樣把「w 是純虛數」化為一條可以運用的方程？

非零的 w 是純虛數，當且僅當 $w^*=-w$，即 $w/w^*=-1$。對兩條弦分別使用恆等式（第二條以 r,s 代替 p,q），

$$\frac{w}{w^*}=\frac{p-q}{p^*-q^*}\cdot\frac{r^*-s^*}{r-s}=\frac{-pq/a^2}{-rs/a^2}=\frac{pq}{rs}.$$

所以 $PQ\perp RS$ 當且僅當 $pq/rs=-1$。由於 $rs\neq 0$，這就是說

$$pq+rs=0.$$

這裏每一步都可逆，所以我們證明的比題目要求的稍多：對於這個圓的弦，$PQ\perp RS\iff pq+rs=0$。下文需要用到逆命題（converse）這個方向。

多邊形問題

設點 A_k 和 B_k 分別由 α_k 和 β_k 表示。根據上一部分（及其逆命題），那 n 個垂直條件恰好就是

$$\beta_k\beta_{k+1}=-\alpha_k\alpha_{k+1}\quad(k=1,\dots,n-1),\qquad \beta_n\beta_1=-\alpha_n\alpha_1,$$

前提是相鄰的 B 互不相同，使每條 B_kB_{k+1} 確實是一條弦。

選定 β_1。由於 $\beta_{k+1}=-\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$，首 $n-1$ 個條件便依次確定 $\beta_2,\beta_3,\dots,\beta_n$，而且每個 β_{k+1} 的模（modulus）自動等於 a。算出最初幾個：

$$\beta_2=-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1},\qquad \beta_3=-\frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2}=\frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1},\qquad \beta_4=-\frac{\alpha_3\alpha_4}{\beta_3}=-\frac{\alpha_1\alpha_4}{\beta_1},$$

再用簡單的歸納法（induction）可得

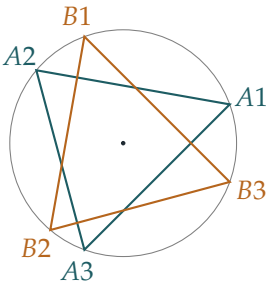
$$\beta_k=\frac{\alpha_k\beta_1}{\alpha_1}\ (k\text{ 為奇數}),\qquad \beta_k=-\frac{\alpha_1\alpha_k}{\beta_1}\ (k\text{ 為偶數}).$$

（若公式對 k 成立，則由 $\beta_{k+1}=-\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$ 可得 $k+1$ 時的另一種形式。）現在一切取決於最後一個條件 $\beta_n\beta_1=-\alpha_n\alpha_1$ 是否成立。

$n=3$。這時 $\beta_3=\alpha_3\beta_1/\alpha_1$，所以閉合條件是

$$\frac{\alpha_3\beta_1^2}{\alpha_1}=-\alpha_3\alpha_1\iff\beta_1^2=-\alpha_1^2\iff\beta_1=\pm\mathrm{i}\,\alpha_1.$$

所以 B_1 只有兩個選擇。取 $\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$ 時，由公式得 $\beta_2 = \mathrm{i}\alpha_2$ 和 $\beta_3 = \mathrm{i}\alpha_3$；取 $\beta_1 = -\mathrm{i}\alpha_1$ 時，每個 $\beta_k = -\mathrm{i}\alpha_k$。兩種情況下，三角形 $B_1B_2B_3$ 都是三角形 $A_1A_2A_3$ 繞圓心旋轉一個直角而成。它的頂點互不相同，所以兩個選擇都確實可行；而把一條弦旋轉 $90°$，所得的弦當然與原來的弦垂直。



圖中所示的是 $\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$ 這個選擇：琥珀色三角形的每一邊，都是藍綠色三角形的對應邊轉過 $90°$ 而成。

$n = 4$。這時 $\beta_4 = -\alpha_1\alpha_4/\beta_1$，所以不論 β_1 是甚麼，

$$\beta_4\beta_1 = -\alpha_1\alpha_4$$

都自動成立。因此 B_1 可以選在圓上*任何位置*，有無窮多個選擇。唯一的例外，是會令兩個相鄰的 B 重合的有限多個位置。例如，$\beta_1 = \beta_2$ 需要 $\beta_1^2 = -\alpha_1\alpha_2$，這排除了兩個點。四種重合情況各自最多排除兩個點，所以最多有八個位置被排除。

$n > 4$。同樣的計算對每個 n 都適用，而且只有 n 的奇偶性（parity）起作用：

- 若 n 是奇數，閉合條件是 $\beta_1^2 = -\alpha_1^2$。恰好有兩個選擇 $\beta_1 = \pm\mathrm{i}\alpha_1$，而 $B_1B_2\cdots B_n$ 就是多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 繞圓心旋轉 $\pm 90°$ 而成；
- 若 n 是偶數，閉合條件自動成立。除了最多 $2n$ 個會令相鄰的 B 重合的位置外，B_1 可以是圓上任何一點，所以有無窮多個選擇。

驗算

- 試取 $p = a$，$q = \mathrm{i}a$：這時 $pq = \mathrm{i}a^2$，而 $-a^2(a - \mathrm{i}a)/(a + \mathrm{i}a) = -a^2 \cdot (-\mathrm{i}) = \mathrm{i}a^2$，與預期相符。
- 試取直徑 $p = a$，$q = -a$ 和 $r = \mathrm{i}a$，$s = -\mathrm{i}a$，兩者互相垂直：$pq + rs = -a^2 + a^2 = 0$。
- 數值方面，我們以 1000 個隨機構形測試了恆等式和判別準則 $PQ \perp RS \iff pq + rs = 0$。對 $n = 3, \ldots, 9$，我們由隨機的起點出發執行遞推。當 n 是奇數時，讓 B_1 以

0.1° 為步長繞圓掃描一周，這條鏈只在 $\beta_1 = \pm i\alpha_1$ 附近閉合。當 n 是偶數時，它每次都閉合，而且所有弦都互相垂直，誤差僅為捨入誤差。

常見錯誤

- 只證明「垂直 $\Rightarrow pq + rs = 0$」。處理多邊形時還需要逆命題，才能肯定我們構造出來的 β 確實給出互相垂直的弦。
- 把「垂直即 w 是虛數」寫成 $w + w^* = 0$，卻沒有指出 $w \neq 0$。這裏由於各點互不相同，$w \neq 0$ 是有保證的。
- 當 n 是偶數時，說「每個 B_1 都可行」，卻沒有留意到有少數位置會令兩個相鄰的 B 重合，以致那條「弦」沒有方向。

STEP 之外

映射 $z \mapsto a^2/z^*$ 是關於圓 $|z| = a$ 的*反演*，而圓上的點在這個映射下保持不動（$p = a^2/p^*$），正是整道題目的動力所在。反演是莫比烏斯變換（Möbius transformation）的一種，而莫比烏斯變換在複分析與幾何的入門課程中佔有核心地位。多邊形的論證帶有*單值性*（monodromy）的味道：沿着一連串別無選擇的步驟繞一圈，然後問是否回到起點，而答案取決於 n 的奇偶性。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）把反演和這些幾何思想闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。