詳細解答

STEP III 2007，第 5 題

純數學 • 高階導數與數學歸納法

STEP III 2007，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/07-s3-q5

關鍵思路

只要把 r 和 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$ 都單用 θ 表示，一切便變得簡單。由 $\coth\theta = x$ 可得 $r = 1/\sinh\theta$，繼而有 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x = \cosh\theta$ 及 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$。對 $\cosh n\theta / r^n$ 求導，所得的恰好就是 $\cosh(n+1)\theta$ 的複角公式（compound-angle formula），於是便可用歸納法（induction）證明。

解答

準備工作

由於 $x > 1$，方程 $\coth\theta = x$ 有唯一滿足 $\theta > 0$ 的解，因此 $\sinh\theta > 0$。利用 $\coth^2\theta - 1 = \operatorname{cosech}^2\theta$，

$$r^2 = x^2 - 1 = \coth^2\theta - 1 = \frac{1}{\sinh^2\theta}, \qquad \text{所以} \qquad r = \frac{1}{\sinh\theta},$$

這裏取正根，因為 r 和 $\sinh\theta$ 都是正數。

整個解答只靠兩個導數（derivative）。把 $\coth\theta = x$ 對 x 求導，

$$-\operatorname{cosech}^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\sinh^2\theta = -\frac{1}{r^2}.$$

把 $r^2 = x^2 - 1$ 求導，得 $2r\,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 2x$，所以

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{r} = \coth\theta\,\sinh\theta = \cosh\theta.$$

首兩個導數

由於 $y = \ln r^2 = 2\ln r$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{2\cosh\theta}{r},$$

正是所求。至於二階導數，最簡潔的做法是寫成 $1/r = \sinh\theta$，於是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cosh\theta\sinh\theta = \sinh 2\theta$。由鏈式法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\cosh 2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\cosh 2\theta}{r^2},$$

正是所求。

三階導數

現在把二階導數寫成 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -2\cosh 2\theta\sinh^2\theta$，並運用積法則（product rule），其中 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} &= -2(2\sinh 2\theta\sinh^2\theta + 2\cosh 2\theta\sinh\theta\cosh\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\\ &= 4\sinh^3\theta(\cosh 2\theta\cosh\theta + \sinh 2\theta\sinh\theta)\\ &= 4\sinh^3\theta\cosh 3\theta,\end{aligned}$$

最後一步用了恆等式 $\cosh(A+B) = \cosh A\cosh B + \sinh A\sinh B$。所以

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{4\cosh 3\theta}{r^3}.$$

一般公式

從 $2\cosh\theta/r$、$-2\cosh 2\theta/r^2$、$4\cosh 3\theta/r^3$ 這個規律可見，係數應為 $2\cdot 0!$、$-2\cdot 1!$、$2\cdot 2!$，因此我們猜想

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\,\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \qquad (n \geq 1).$$

? **想一想** 剛才求三階導數的那個計算，推廣到一般情況會是怎樣的？

那就是求 $\cosh n\theta/r^n = \cosh n\theta\ \sinh^n\theta$ 的導數。由積法則和鏈式法則，並利用 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh n\theta\ \sinh^n\theta) &= (n\sinh n\theta\ \sinh^n\theta + n\cosh n\theta\ \sinh^{n-1}\theta\cosh\theta)(-\sinh^2\theta)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\,(\cosh n\theta\cosh\theta + \sinh n\theta\sinh\theta)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\ \cosh(n+1)\theta,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh n\theta}{r^n}\right) = -\frac{n\cosh(n+1)\theta}{r^{n+1}}.$$

現在進行歸納。公式對 $n = 1$ 成立（它就是上面求得的一階導數）。假設公式對某個 $n = k \geq 1$ 成立。那麼，把上面的計算用於 $n = k$，

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}y}{\mathrm{d}x^{k+1}} = (-1)^{k-1}\,2\,(k-1)!\cdot\left(-\frac{k\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}}\right) = (-1)^k\,\frac{2\,k!\,\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}},$$

這正是 $n = k+1$ 時的公式。由歸納法，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\,\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \quad \text{對所有} n \geq 1.}$$

（$n = 2$ 和 $n = 3$ 的情況與我們直接求得的結果一致。）

另一途徑

部分分式（partial fractions）提供了一個獨立的推導。由於 $y = \ln(x-1) + \ln(x+1)$，

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,[(x-1)^{-n} + (x+1)^{-n}].$$

但 $x \pm 1 = \dfrac{\cosh\theta \pm \sinh\theta}{\sinh\theta} = r\,\mathrm{e}^{\pm\theta}$，所以方括號內的式子等於 $r^{-n}(\mathrm{e}^{-n\theta} + \mathrm{e}^{n\theta}) = 2\cosh n\theta / r^n$，得出相同的公式。這也解釋了這個代換的來歷：$\theta$ 就是 $\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ 的一半。

驗算

- 當 $x = 2$ 時：由部分分式得 $\mathrm{d}^3y/\mathrm{d}x^3 = 2\left(1 + \frac{1}{27}\right) = \frac{56}{27} \approx 2.0741$，而以 $\theta = \tanh^{-1}\frac{1}{2}$、$r = \sqrt{3}$ 代入 $4\cosh 3\theta / r^3$ 亦得相同的值。
- 我們在 200 個滿足 $x > 1$ 的隨機點上，把首三個導數與 $\ln(x^2-1)$ 的有限差分（finite differences）作了比較，又就 $n \leq 14$ 把一般公式與部分分式的形式作了比較（兩者相符至約 10^{-14}）。
- 正負號：當 $x > 1$ 時，$\ln(x^2-1)$ 遞增而且是凹的（concave），與 $y' > 0$ 及 $y'' < 0$ 吻合。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = +\sinh^2\theta$：$\coth\theta$ 的導數是 $-\operatorname{cosech}^2\theta$，而正是這個負號令各階導數的正負號交替出現。

- 階乘（factorial）差了一位：第 n 階導數所帶的是 $(n-1)!$，因為一階導數的係數是 $2 = 2 \cdot 0!$。
- 只驗證幾個情況便停下來：題目要求「with proof」（附證明），就必須寫出一般的歸納步驟。

STEP 之外

每一階導數都有如此簡潔的閉合形式（closed form），讓我們一窺複分析（complex analysis）的面貌：$\ln(x^2-1)$ 在 $x = \pm 1$ 處有奇點（singularities），而它的高階導數正是由到這些奇點的距離所支配，在這裏就是 $x \mp 1 = re^{\mp\theta}$。在大學一年級的分析課程中，要估計泰勒級數（Taylor series）餘項的界，並求出其收斂半徑（radius of convergence），所需要的正是這類公式。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把奇點為何支配冪級數（power series）解釋得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。