詳細解答

STEP III 2007，第 4 題

純數學 • 參數曲線與曲率

> **STEP III 2007，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q4

關鍵思路

一切都建基於 $\dot{x}$ 的一條簡潔公式。看似棘手的一項 $\ln\tan\frac{1}{2}t$ 求導後得 $1/\sin t$，於是 $\dot{x}$ 便化簡為 $a\cos^2 t/\sin t$。一旦求得 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$，斜率（gradient）、切線（tangent）、曲率（curvature）和法線（normal）都可以用直接的坐標幾何逐一得出。把單位切向量（unit tangent）寫成 $(\cos t, \sin t)$，可令最後一部分十分簡短。

解答

斜率

由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\tan\frac{1}{2}t = \dfrac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t}{\tan\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{2\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{\sin t}$，我們得到

$$\dot{x} = a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) = a\,\frac{1-\sin^2 t}{\sin t} = \frac{a\cos^2 t}{\sin t},$$
$$\dot{y} = a\cos t.$$

當 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ 時兩者皆為正數，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a\cos t\cdot\frac{\sin t}{a\cos^2 t} = \tan t,$$

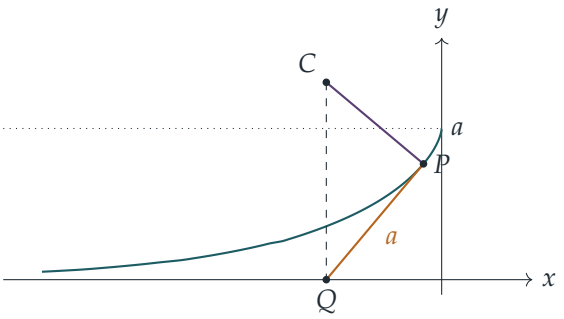
正如題目所求。

草圖

- 當 $t \to 0^+$ 時，$\tan\frac{1}{2}t \to 0^+$，所以 $x \to -\infty$ 而 $y \to 0$。x 軸是一條漸近線（asymptote）。

- 當 $t \to \frac{1}{2}\pi^-$ 時，$x \to a(0+\ln 1) = 0$ 而 $y \to a$。曲線終止於 $(0,a)$，該處的斜率 $\tan t \to \infty$，所以該處的切線是垂直的。
- 由於 $\dot{x} > 0$，x 隨 t 遞增，斜率 $\tan t$ 亦然。所以曲線穩步上升，並且向上凹（concave upwards），而 y 介乎 0 與 a 之間。

這條曲線就是曳物線（tractrix）。圖中亦標示了後面各部分所用的點 P、Q 和 C。



切線：$PQ = a$

在 $P = (x,y)$ 的切線斜率為 $\tan t$。由 P 沿水平方向往回走 $y/\tan t$ 的距離，切線便與 $y = 0$ 相交，所以

$$x_Q = x - \frac{y}{\tan t} = x - \frac{a\sin t\cos t}{\sin t} = x - a\cos t.$$

因此 $\overrightarrow{QP} = (a\cos t,\ a\sin t)$，並且

$$PQ = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = a.$$

所以由曲線至 x 軸的切線長度恆為 a。（留待後用：$x_Q = a\ln\tan\frac{1}{2}t$。）

曲率半徑

把 $\dot{x}$ 寫成 $\dot{x} = a\Big(\dfrac{1}{\sin t} - \sin t\Big)$，求導便容易得多：

$$\ddot{x} = a\Big(-\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \cos t\Big), \qquad \ddot{y} = -a\sin t.$$

於是

$$\begin{aligned}\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} &= \frac{a\cos^2 t}{\sin t}(-a\sin t) + a\cos t\cdot a\Big(\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \cos t\Big)\\ &= a^2\Big(-\cos^2 t + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + \cos^2 t\Big) = a^2\cot^2 t,\end{aligned}$$

以及

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = a^2\cos^2 t\left(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}+1\right) = \frac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t} = a^2\cot^2 t.$$

由於在我們的範圍內 $\cot t > 0$，故 $(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2} = a^3\cot^3 t$，因此

$$\rho = \frac{a^3\cot^3 t}{a^2\cot^2 t} = a\cot t,$$

正如題目所求。

曲率中心：CQ 是垂直的

在 P 的切線沿單位向量 $(\cos t, \sin t)$ 的方向，所以法線沿 $(-\sin t, \cos t)$ 或其反方向。

> ? **想一想** 兩個法線方向之中，哪一個是「在曲線上方」？

由於 $\cos t > 0$，向量 $(-\sin t, \cos t)$ 的 y 分量為正數。由 P 沿這個方向走一小段，便會到達曲線上方，因為曲線向上凹（而且無論如何，另一個方向只會把我們帶往下方）。所以

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \rho(-\sin t, \cos t) = \big(x - a\cot t\sin t,\ a\sin t + a\cot t\cos t\big).$$

根據切線部分的結果，其 x 坐標為

$$x_C = x - a\cos t = x_Q$$

。所以 C 和 Q 的 x 坐標相同，CQ 平行於 y 軸，正如題目所求。（y 坐標可化簡為 $a\sin t + \dfrac{a\cos^2 t}{\sin t} = \dfrac{a}{\sin t}$，所以 $C = \big(a\ln\tan\tfrac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t\big)$。）

驗算

- 取 $a = 1$ 和 $t = \frac{5\pi}{18}$（50°），得 $P \approx (-0.1202, 0.7660)$ 和 $Q \approx (-0.7630, 0)$，由此 $PQ = 1.0000$。公式給出 $C \approx (-0.7630, 1.3054)$，正好在 Q 的正上方。
- 以 2000 組隨機的 a 和 t 值作數值檢驗，其中 $\dot{x}$、$\ddot{x}$ 以有限差分（finite differences）求得，結果與 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \tan t$、$PQ = a$、$\rho = a\cot t$ 和 $x_C = x_Q$ 相符，誤差只在捨入誤差範圍之內。
- 當 $t \to \frac{1}{2}\pi$ 時，$\rho \to 0$：曲線趨近 $(0, a)$ 時彎得愈來愈急（它對 y 軸的鏡像與它在該處相接，形成一個尖點（cusp））。當 $t \to 0$ 時，$\rho \to \infty$，與曲線逐漸貼平於漸近線的情況吻合。

常見錯誤

- 對 $\ln\tan\frac{1}{2}t$ 求導時，漏掉由鏈式法則(chain rule)而來的因子 $\frac{1}{2}$。答案必須是 $1/\sin t$。
- 把 $\dot{x}$ 留作 $a(-\sin t+\operatorname{cosec} t)$ 而不加化簡。正是 $a\cos^2 t/\sin t$ 這個形式，才令其後每一部分都整齊利落。
- 採用法線方向 $(\sin t, -\cos t)$，這個方向指向曲線下方，會把 C 放在錯誤的位置。

STEP 之外

設有人沿 x 軸行走，用一條長度為 a 的繩拖着一件重物，重物所走的路徑就是曳物線，而 $PQ = a$ 正是這個性質。點 C 描出曲線的*漸屈線*（evolute），即其曲率中心的軌跡(locus)。這裏 $C = (a\ln\tan\frac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t)$ 原來位於一條懸鏈線（catenary）上。把曳物線繞其漸近線旋轉，便得到偽球面（pseudosphere），這是一個具有恆定負曲率的曲面，也是雙曲幾何（hyperbolic geometry）的一個模型。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 對偽球面有一段優美的幾何論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。