詳細解答

STEP III 2007，第 3 題

純數學 • 斐波那契恆等式

> **STEP III 2007，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q3

關鍵思路

這裏每一條恆等式的證法都一樣：取下標最大的那一項，用遞推關係（recurrence）$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ 把它拆開。這樣做一次，(ii) 中的式子就變成所有下標都減一的式子；做兩次，便回到同一形狀而下標全部減二，這正是歸納法（induction）所需要的。至於 (iv) 的整除性（divisibility），留意 $F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+1}$，所以 F_{2n-1}^2 與 F_{2n}^2 除以 F_{2n+1} 時餘數相同。

解答

第 (i) 部分

由 $F_1 = F_2 = 1$ 開始，把相鄰兩項相加：

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21.$$

第 (ii) 部分

設 $k \geq 1$，使每一項都有定義。把下標最大的項 F_{2k+3} 換成 $F_{2k+2} + F_{2k+1}$：

$$\begin{aligned} F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 &= (F_{2k+2} + F_{2k+1})F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 \\ &= F_{2k+1}^2 + F_{2k+2}(F_{2k+1} - F_{2k+2}) \\ &= F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}, \end{aligned}$$

因為由遞推關係可知 $F_{2k+2} - F_{2k+1} = F_{2k}$。這就是 $-F_{2k+2}F_{2k} + F_{2k+1}^2$，正如所求。

第 (iii) 部分

以 $P(n)$ 表示命題 $F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 = 1$。

基礎情況（*base case*）。當 $n = 1$ 時：$F_3F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$，所以 $P(1)$ 成立。

歸納步驟（*inductive step*）。假設 $P(k)$ 對某個 $k \geq 1$ 成立。由第 (ii) 部分，

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}.$$

? **想一想** 第 (ii) 部分只把下標減了一。怎樣才能一路退回到 $P(k)$？

再用一次同樣的技巧，這次拆開下標最大的項 $F_{2k+2} = F_{2k+1} + F_{2k}$：

$$\begin{aligned} F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k} &= F_{2k+1}^2 - (F_{2k+1} + F_{2k})F_{2k} \\ &= F_{2k+1}(F_{2k+1} - F_{2k}) - F_{2k}^2 \\ &= F_{2k+1}F_{2k-1} - F_{2k}^2, \end{aligned}$$

當中用到 $F_{2k+1} - F_{2k} = F_{2k-1}$（因為 $2k+1 \geq 3$，所以成立）。根據歸納假設（hypothesis）$P(k)$，這個式子等於 1。把以上兩組等式連起來，

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = 1,$$

這就是 $P(k+1)$。由歸納法，$P(n)$ 對所有 $n \geq 1$ 成立。

推論。把 $P(n)$ 移項，

$$F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1},$$

而 F_{2n-1} 是整數（由遞推關係可知每個 F_m 都是整數），所以 $F_{2n}^2 + 1$ 可被 F_{2n+1} 整除。

第 (iv) 部分

由遞推關係，$F_{2n-1} = F_{2n+1} - F_{2n}$。兩邊平方，

$$F_{2n-1}^2 = F_{2n+1}^2 - 2F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n}^2,$$

所以

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}(F_{2n+1} - 2F_{2n}) + (F_{2n}^2 + 1).$$

第一個括號所在的一項是 F_{2n+1} 的倍數（它的餘因子（cofactor）是整數），而由第 (iii) 部分可知 $F_{2n}^2 + 1$ 也是 F_{2n+1} 的倍數。因此 $F_{2n-1}^2 + 1$ 可被 F_{2n+1} 整除。

事實上我們還可以求出商（quotient）。利用 $F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1}$，

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}(F_{2n+1} - 2F_{2n} + F_{2n-1}) = F_{2n+1}(2F_{2n-1} - F_{2n}),$$

而當 $n \geq 2$ 時，括號內的式子是 $F_{2n-1} - F_{2n-2} = F_{2n-3}$。所以 $F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-3}$，與 (iii) 中的恆等式（identity）十分相似。

驗算

取 $n = 3$：$F_6^2 + 1 = 65 = 13 \times 5 = F_7F_5$，而 $F_5^2 + 1 = 26 = 13 \times 2 = F_7F_3$。取 $n = 4$：$F_7^2 + 1 = 170 = 34 \times 5 = F_9F_5$。我們亦用電腦驗證過，對於直至 37 的每一個 n，(ii) 和 (iii) 中的恆等式、兩個整除性命題以及商 F_{2n-3} 全部成立。

常見錯誤

- 只用 (ii) 來做歸納：它只把下標減一，所得的式子 $F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}$ 還不是歸納假設，必須再用一次遞推關係。
- 忘記基礎情況，或驗證時用錯下標（$n = 1$ 涉及 F_1、F_2、F_3）。

STEP 之外

第 (iii) 部分是卡西尼恆等式（Cassini's identity）$F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$ 的一半，而這條恆等式用行列式（determinant）即可立刻得出：矩陣 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m$ 的元素是 F_{m+1}、F_m、F_m、F_{m-1}，而它的行列式是 $(-1)^m$。像 (iv) 這類整除性的結果，是線性遞推數列（linear recurrence）算術的起點，當中大部分工作都靠同餘（congruence）完成。想進一步學習數論（number theory），Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算術）是很好的下一步；想了解矩陣的觀點，則可讀 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數導論）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。