詳細解答

STEP III 2007，第 2 題

純數學 • 二項式冪級數

> **STEP III 2007，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q2

關鍵思路

一切都源自同一個二項級數（binomial series）。只要知道 $(1-4x)^{-1/2}$ 的係數，對級數求導便會帶出一個因子 n（把 $(n!)^2$ 變成 $n!\,(n-1)!$），而對它積分則會除以 $n+1$（把 $(n!)^2$ 變成 $n!\,(n+1)!$）。因此，後面每一個和都是第一個級數的導數或積分，在 $|x|<\frac{1}{4}$ 內一個精心挑選的點上取值。

解答

第 (i) 部分

把奇數的乘積同時乘以和除以所欠缺的偶數 $2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)$：

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-1)(2n)}{2\cdot 4\cdots(2n)}=\frac{(2n)!}{2^n\,(1\cdot 2\cdots n)}=\frac{(2n)!}{2^n\,n!},$$

因為 n 個偶數 $2k$ 各自提供一個因子 2 和一個因子 k。

當 $|4x|<1$，即 $|x|<\frac{1}{4}$ 時，由二項級數得

$$(1-4x)^{-1/2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}(-4x)^n.$$

分子有 n 個因子，每個都是負數，所以它等於 $(-1)^n\,\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}$。這個 $(-1)^n$ 與 $(-4)^n$ 中的符號互相抵消，而 $4^n/2^n=2^n$，所以 x^n 的係數是

$$\frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}=\frac{2^n}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\,n!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

這裏用了第一個結果。因此，當 $|x| < \frac{1}{4}$ 時，

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, x^n,$$

正是所求。

第 (ii) 部分

冪級數（power series）在其收斂區間（interval of convergence）之內可以逐項求導（differentiate term by term），這裏的收斂區間是 $|x| < \frac{1}{4}$。對兩邊求導，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-4x)^{-1/2} = -\tfrac{1}{2}(1-4x)^{-3/2}\cdot(-4) = 2(1-4x)^{-3/2},$$

而右邊的常數項消失，x^n 變成 nx^{n-1}。由於 $n/(n!)^2 = 1/(n!\,(n-1)!)$，

$$2(1-4x)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^{n-1}.$$

乘以 x 便得到我們想要的冪 x^n：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^n = \frac{2x}{(1-4x)^{3/2}} \qquad (|x| < \tfrac{1}{4}).$$

現在代入 $x = \frac{6}{25}$，這是容許的，因為 $\frac{6}{25} < \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$。這時 $1-4x = \frac{1}{25}$，所以 $(1-4x)^{3/2} = \frac{1}{125}$，於是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{6}{25}\right)^n = 2\cdot\frac{6}{25}\cdot 125 = 60.$$

第 (iii) 部分

> ? **想一想** 現在階乘是 $(n+1)!\,n!$ 而不是 $(n!)^2$。對級數做甚麼運算才會得出這個結果？

我們需要把第 n 個係數除以 $n+1$，因為 $(n+1)! = (n+1)\,n!$。對 x^n 積分正好做到這一點：$\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$。冪級數在其收斂區間之內同樣可以逐項積分（term-by-term integration），所以當 $|x| < \frac{1}{4}$ 時，我們把第 (i) 部分的級數由 0 積分至 x：

$$\int_0^x (1-4t)^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\tfrac{1}{2}(1-4t)^{1/2}\Big]_0^x = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2},$$

於是

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

接着我們要對上目標和式中的冪。由於 $3^{2n} = 9^n = 9^{n+1}/9$，

$$\frac{2^{n+1}}{3^{2n}} = 9\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1},$$

所以目標和式等於我們的級數在 $x = \frac{2}{9}$ 處的值的 9 倍。這個值是合理的，因為 $\frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$。在該處，$1 - 4x = \frac{1}{9}$ 而 $\sqrt{1-4x} = \frac{1}{3}$，由此得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(2n)!}{3^{2n}(n+1)!\,n!} &= 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} \\ &= 9\left(\frac{1-\frac{1}{3}}{2} - \frac{2}{9}\right) = 9\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = 1,\end{aligned}$$

正是所求。留意首項 x（即常數 1 的積分）必須減去，因為和式由 $n = 1$ 開始。

驗算

- 在 (i) 中，$n = 2$ 給出 $1 \cdot 3 = 3$ 和 $\frac{4!}{2^2\,2!} = 3$；級數的開首是 $1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \cdots$，與平方後的結果吻合：$(1 + 2x + 6x^2)^2(1 - 4x) = 1 + O(x^3)$。
- 以精確分數把 (ii) 的首 3000 項相加，得 60.000…；而 (iii) 的首 400 項之和為 1.000…，準確至機器精度。
- 在 (iii) 中，首項（$n = 1$）是 $\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2} = \frac{4}{9}$，已佔總和 1 的相當大部分；其後各項大致按 $(8/9)^n$ 的速度遞減。

常見錯誤

- 弄錯二項式係數（binomial coefficient）的正負號：分子有 n 個負因子，$(-4)^n$ 中也有 n 個，所以它們剛好互相抵消。
- 忘記檢查 $\frac{6}{25}$ 和 $\frac{2}{9}$ 是否位於 $|x| < \frac{1}{4}$ 之內；在這個範圍之外，級數會發散（diverge）。
- 在 (iii) 中，忘記了對常數 1 積分所得的 x 項，這樣會得出答案 3 而不是 1。

STEP 之外

第 (iii) 部分出現的數 $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 就是卡塔蘭數(Catalan numbers)$1, 1, 2, 5, 14, \ldots$，它們可用來點算加括號的方式、二元樹（binary trees）以及許多其他結構的數目，而 $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ 是它們的母函數（generating function）。我們未經證明便使用的事實，即冪級數在嚴格位於其收斂半徑（radius of convergence）之內的範圍可以逐項求導和逐

項積分，是大學一年級分析學（analysis）的標準定理；參見 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。