詳細解答

STEP III 2007，第 14 題

概率與統計 • 幾何概率

STEP III 2007，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/07-s3-q14

關鍵思路

包圍所有洞孔的最小同心圓（或正方形），由最遠的那個洞孔決定，所以我們要找的是最大值的分佈，而 $P(\max \le r)$ 不過是單次投擲的概率（probability）的 n 次方。在圓盤上，一個洞孔與 O 的距離的平方 R^2 原來在 $[0,1]$ 上服從均勻分佈（uniform distribution），於是一切都變得簡潔。在正方形上，合適的「距離」是 $\max(|x|,|y|)$，它的表現與圓盤上的半徑完全一樣。這個巧合也令第 (iii) 部分幾乎不費吹灰之力就解決了。

解答

第 (i) 部分

設 n 個洞孔與 O 的距離為 $R_1,\dots,R_n$。由於各次投擲互相獨立，這些距離亦互相獨立（independent）。對單次投擲及 $0 \le r \le 1$，洞孔與 O 的距離不超過 r，當且僅當它落在半徑為 r 的圓盤內，所以

$$P(R_i \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi \cdot 1^2} = r^2.$$

設 $U_i = R_i^2$。那麼對 $0 \le u \le 1$，$P(U_i \le u) = P(R_i \le \sqrt{u}) = u$，所以每個 U_i 都在 $[0,1]$ 上服從均勻分佈，而且各 U_i 互相獨立。

以 O 為圓心並包圍所有洞孔的最小圓，半徑為 $M = \max_i R_i$，面積為 $\pi M^2 = \pi \max_i U_i$。記 $V = \max_i U_i$。由獨立性，

$$P(V \le v) = P(U_1 \le v) \cdots P(U_n \le v) = v^n \qquad (0 \le v \le 1),$$

所以 V 的概率密度函數（density）為 nv^{n-1}，而

$$E(V) = \int_0^1 v \cdot nv^{n-1}\,\mathrm{d}v = \frac{n}{n+1}.$$

因此，包圍全部 n 個洞孔的最小圓的期望（expected）面積為

$$\boxed{\frac{n\pi}{n+1}}.$$

至於包圍最接近 O 的 $n-1$ 個洞孔的圓，其半徑是第二大的距離，所以面積為 πW，其中 W 是 $U_1,\ldots,U_n$ 之中第二大的值。

想一想 怎樣求出第二大的值的分佈？

$W \le w$ 當且僅當各 U_i 之中最多只有一個超過 w。要麼沒有任何一個超過（概率為 w^n），要麼恰好有一個超過：選出是哪一個有 n 種方法，得出概率 $n(1-w)w^{n-1}$。所以

$$P(W \le w) = w^n + n(1-w)w^{n-1} = nw^{n-1} - (n-1)w^n.$$

我們不必求導，而可以利用 $E(W) = \int_0^1 P(W > w)\,\mathrm{d}w$，這條公式對任何取值於 $[0,1]$ 的隨機變量（random variable）都成立：

$$E(W) = \int_0^1 (1 - nw^{n-1} + (n-1)w^n)\,\mathrm{d}w = 1 - 1 + \frac{n-1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

所以，包圍最近的 $n-1$ 個洞孔的圓的期望面積為

$$\boxed{\frac{(n-1)\pi}{n+1}}.$$

（這符合一個漂亮的規律：n 個獨立的均勻分佈點把 $[0,1]$ 分成 $n+1$ 段間隙，每段的期望長度同為 $\frac{1}{n+1}$，所以第 k 小的點的平均值為 $\frac{k}{n+1}$。）

第 (ii) 部分

取通過 Q 且與鏢靶各邊平行的坐標軸，於是鏢靶就是 $-1 \le x, y \le 1$。我們取包圍洞孔的正方形，使其各邊與鏢靶的邊平行。以 Q 為中心、半邊長為 s 的正方形是 $\{|x| \le s,\ |y| \le s\}$，所以它包含洞孔 (x,y) 當且僅當 $\max(|x|,|y|) \le s$。

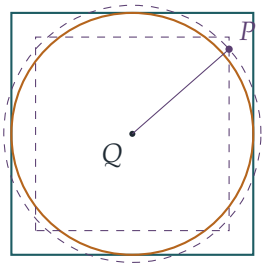
對第 i 個洞孔，設 $S_i = \max(|x_i|,|y_i|)$。對 $0 \le s \le 1$，

$$P(S_i \le s) = \frac{(2s)^2}{2^2} = s^2,$$

與第 (i) 部分的 $P(R_i \le r) = r^2$ 相同。包圍所有洞孔的最小正方形，半邊長為 $\max_i S_i$，面積為 $(2\max_i S_i)^2 = 4\max_i S_i^2$。與第 (i) 部分完全一樣，各 S_i^2 互相獨立，並在 $[0,1]$ 上服從均勻分佈，所以它們的最大值的期望值為 $\frac{n}{n+1}$。包圍所有洞孔的最小正方形的期望面積為

$$\boxed{\frac{4n}{n+1}}.$$

第 (iii) 部分



現在鏢靶是正方形，而我們要找以 Q 為圓心並包圍所有洞孔的最小圓。洞孔 $P=(x,y)$ 與 Q 的距離為 $\sqrt{x^2+y^2}$，而

$$\sqrt{x^2+y^2} \;\geq\; \max(|x|,|y|) = S,$$

等號僅在 P 位於坐標軸上時成立。（在圖中，通過 P 的虛線圓永遠不會小於通過 P 的虛線正方形的內切圓。）所以，若 D 是洞孔與 Q 的最大距離，則 $D \geq \max_i S_i$，而包圍所有洞孔的圓的面積滿足

$$\pi D^2 \;\geq\; \pi \max_i S_i^2.$$

由第 (ii) 部分，$\max_i S_i^2$ 的分佈與圓形鏢靶上 $\max_i R_i^2$ 的分佈完全相同，所以

$$E(\pi D^2) \;\geq\; \pi\, E(\max_i S_i^2) = \frac{n\pi}{n+1},$$

這正是第 (i) 部分圓形鏢靶的答案。這個不等式（inequality）是嚴格的：沒有任何洞孔位於坐標軸上的概率為正，而這時 $D > \max_i S_i$。所以正方形鏢靶上的圓，其期望面積**較大**。

直觀地看：正方形鏢靶包含了圓形鏢靶（圓盤就是它的內切圓），而飛鏢會散落到四個角落，所以最遠的洞孔往往離中心更遠。

驗算

- 當 $n=1$ 時，公式給出 $\frac{\pi}{2}$ 和 2：均勻分佈的 R^2 的平均值為 $\frac{1}{2}$，所以結果正確。當 $n\to\infty$ 時，面積趨向 π 和 4，即整個鏢靶，這正合預期。
- 以蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation）對 $n=2,3,5$ 各進行 2×10^5 次試驗，結果與 $\frac{n\pi}{n+1}$、$\frac{(n-1)\pi}{n+1}$ 和 $\frac{4n}{n+1}$ 吻合至約三位有效數字；例如 $n=3$ 時得出 2.3561，而 $\frac{3\pi}{4}\approx 2.3562$。
- 對第 (iii) 部分，以數值積分（quadrature）計算精確分佈，在 $n=3$ 時得出正方形鏢靶上的期望面積約為 3.257，而圓盤上則為 2.356：一如所言，前者較大。

常見錯誤

- 先求 $E(M)$ 然後平方：期望面積是 $\pi E(M^2)$，而不是 $\pi\big(E(M)\big)^2$。
- 以為與中心的距離在 $[0,1]$ 上服從均勻分佈。命中的概率與面積成正比，因此服從均勻分佈的是 R^2 而不是 R；外圍的環面積較大。
- 處理第二大的值時，忘記了因子 n，即哪一個洞孔落在圓外的選法數目。

STEP 之外

樣本的最大值和第二大的值都是順序統計量（order statistics）。對 $[0,1]$ 上 n 個獨立的均勻分佈變量，第 k 小的值服從貝塔分佈（Beta distribution），平均值為 $\frac{k}{n+1}$。第 (iii) 部分是隨機優勢（stochastic dominance）（耦合，coupling）的一個例子：若一個隨機變量總是不小於另一個，則它的期望值亦然，而這個比較無須任何細緻的計算。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門）以及 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率導論）都有討論順序統計量和隨機變量的變換。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。