詳細解答

STEP III 2007，第 12 題

概率與統計 • 隨機和

> **STEP III 2007，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q12

關鍵思路

Y 是一個項數隨機的和，所以不能直接套用固定項數的變量之和的法則。竅門是以 N 為條件（condition）：一旦知道 $N = k$，Y 就是 k 個獨立（independent）變量的普通和，其平均值（mean）和方差（variance）我們都知道。然後再對 N 的分佈取平均，這正是題目第一部分要求 $\mathrm{E}(N)$ 和 $\mathrm{E}(N^2)$ 的原因。

解答

N 的分佈

我們假設該數是均勻地隨機選取的，因此對 $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$ 有 $\mathrm{P}(N = k) = \frac{1}{2n-1}$。利用 $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{1}{2}m(m+1)$ 和 $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$，並取 $m = 2n-1$：

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)(2n)}{2} = n,$$
$$\mathrm{E}(N^2) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{6} = \frac{n(4n-1)}{3}.$$

（平均值 n 亦可由對稱性直接看出：n 正是 $1, \ldots, 2n-1$ 的中間一項。）以下會用到

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{n(4n-1)}{3} - n^2 = \frac{n^2 - n}{3} = \frac{n(n-1)}{3}.$$

以 N 為條件

固定 k，並假設 $N = k$。由於各 X_i 與 N 獨立，以 $N = k$ 為條件並不會改變它們的分佈，所以在已知 $N = k$ 的情況下，$Y = X_1 + \cdots + X_k$，即 k 個獨立變量之和，每個變量的平

均值為 μ，方差為 σ^2。因此

$$\mathrm{E}(Y \mid N=k) = k\mu, \qquad \mathrm{Var}(Y \mid N=k) = k\sigma^2,$$

其中第二式用到各 X_i 互相獨立（方差可以相加）。於是

$$\mathrm{E}(Y^2 \mid N=k) = \mathrm{Var}(Y \mid N=k) + (\mathrm{E}(Y \mid N=k))^2 = k\sigma^2 + k^2\mu^2.$$

想一想 怎樣由條件期望值（conditional expectation）回到普通的期望值？

根據全期望定律（law of total expectation，又稱分割定理 partition theorem）：$\mathrm{E}(g(Y,N)) = \sum_k \mathrm{P}(N=k)\,\mathrm{E}(g(Y,N) \mid N=k)$。在每一項之內，$N$ 只不過是數字 k。

Y 的平均值

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_k \mathrm{P}(N=k)\, k\mu = \mu\,\mathrm{E}(N) = n\mu,$$

正是所求。

協方差

已知 $N=k$ 時，$YN = kY$，所以 $\mathrm{E}(YN \mid N=k) = k\cdot k\mu = k^2\mu$。因此 $\mathrm{E}(YN) = \mu\,\mathrm{E}(N^2)$，而協方差（covariance）為

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y,N) &= \mathrm{E}(YN) - \mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(N) = \mu\,\mathrm{E}(N^2) - n\mu\cdot n \\ &= \mu\,\mathrm{Var}(N) = \tfrac{1}{3}n(n-1)\mu,\end{aligned}$$

這就是所要求的結果。

Y 的方差

把 $\mathrm{E}(Y^2 \mid N=k) = k\sigma^2 + k^2\mu^2$ 對 N 取平均：

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sigma^2\,\mathrm{E}(N) + \mu^2\,\mathrm{E}(N^2) = n\sigma^2 + \frac{n(4n-1)}{3}\mu^2.$$

因此

$$\mathrm{Var}(Y) = n\sigma^2 + \frac{n(4n-1)}{3}\mu^2 - n^2\mu^2 = n\sigma^2 + \frac{n(n-1)}{3}\mu^2.$$

這兩項各有自然的含義：$n\sigma^2$ 是試驗次數固定時 Y 的平均離散程度，而 $\frac{1}{3}n(n-1)\mu^2 = \mu^2\,\mathrm{Var}(N)$ 則是因為不知道試驗次數而額外產生的離散程度。

驗算

- 若 $n = 1$，則必有 $N = 1$，各公式化為 $\mathrm{E}(Y) = \mu$、$\mathrm{Cov}(Y, N) = 0$ 和 $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$，與單獨一個 X_1 的情況相符。
- 若 $\mu = 0$，則額外的一項消失：項數不再影響平均值，所以它既不會增加離散程度，也不會與 Y 相關。
- 取 $n = 2$，並設每個 X_i 各以概率 $\frac{1}{2}$ 取 0 或 1。那麼 $N \in \{1, 2, 3\}$，而 $Y \mid N \sim \mathrm{B}(N, \frac{1}{2})$；公式給出 $\mathrm{Var}(Y) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$。我們已逐一列舉 (N, Y) 的聯合分佈（joint distribution），就 $n = 1, \ldots, 6$ 以及 X_i 的幾種不同分佈，核實了這個數值和所有結果。

常見錯誤

- 只寫 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(N)\sigma^2$，忘記了 N 本身也會變動。第二項才是整題的重點。
- 把 Y 和 N 當作獨立，得出 $\mathrm{Cov}(Y, N) = 0$。當 $\mu > 0$ 時，試驗次數越多，和就越大，所以兩者是正相關的。

STEP 之外

Y 是一個隨機和（random sum，即複合分佈 compound distribution），而方差的結果是全方差定律（law of total variance）的一個特例：$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y \mid N)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y \mid N))$，在這裏即 $\sigma^2\mathrm{E}(N) + \mu^2\mathrm{Var}(N)$。隨機和可用作保險索償和分支過程（branching processes）的模型，而用概率生成函數（probability generating functions）處理則十分簡潔：$G_Y(s) = G_N(G_X(s))$。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）正是以這種方法處理隨機和與分支過程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。