詳細解答

STEP III 2007，第 11 題

力學 • 滾過邊緣

> **STEP III 2007，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q11

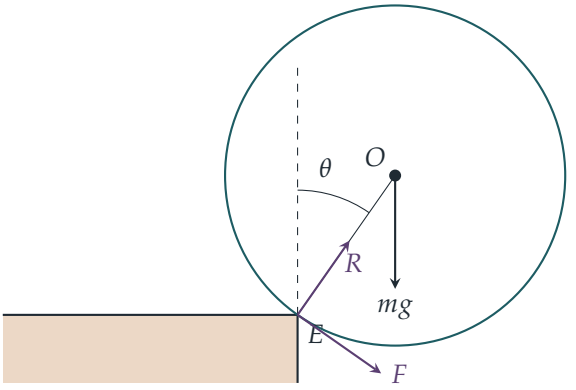
關鍵思路

輪緣一到達桌邊，桌邊便成為支點（pivot）：輪緣上與桌邊接觸的那一點是靜止的，所以輪心沿着以桌邊為圓心、半徑為 a 的圓運動。我們把桌邊的接觸力分解為沿半徑方向的分量 R（法向反作用力，normal reaction）和沿輪緣方向的分量 F（摩擦力，friction），再與質心（centre of mass）的運動作比較。整道題的關鍵在於質量位於何處。在 (i) 中，全部質量都在輪心，所以輪子對其中心的轉動慣量（moment of inertia）為零。在 (ii) 中，質量分佈在輪緣上，摩擦力正是由此而生。

解答

模型與記號。輪緣（rim）、輪輻（spokes）和圓環（hoop）都是輕而剛硬的；輪轂（hub）和兩個質點（particles）都視為質點。設 E 為桌邊上與輪緣接觸的點，O 為輪心，θ 為 EO 與豎直向上方向所成的角，所以在輪子到達桌邊的一刻 $\theta = 0$。只要輪緣與 E 保持接觸而不滑動，輪緣上位於 E 的那個物質點便是靜止的。因此這個剛體（rigid body）繞 E 轉動，角速率（angular speed）為 $\dot{\theta}$，而 O 沿着以 E 為圓心、半徑為 a 的圓運動，速率為 $a\dot{\theta}$。

在 E 的接觸力有一個沿 EO 方向（背離 E）的分量 R，以及一個垂直於 EO 的分量 F，後者以 θ 增加的方向為正。由於 E 靜止，接觸力不作功，所以能量守恆（conservation of energy）。



圖中 R 沿 EO 作用，而 F 則按其正方向繪出。

質心 G 與 E 的距離為 a，其加速度沿運動方向的分量為 $a\ddot{\theta}$，指向 E 的分量為 $a\dot{\theta}^2$。分解作用於整個物體的外力（重力 mg 和接觸力）：

$$\text{沿運動方向：}\quad ma\ddot{\theta} = mg\sin\theta + F, \tag{1}$$

$$\text{指向}E\text{：}\quad ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R. \tag{2}$$

在兩部分中，質心都位於 O（即輪轂；亦即兩個質點的中點），所以 (1) 和 (2) 在兩部分都成立。

第 (i) 部分

輪子在桌面上以恆定速率 u 運動，所以在 $\theta = 0$ 時有 $\dot{\theta} = u/a$。唯一的動能是輪轂的動能 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$，而輪轂下降了 $a(1-\cos\theta)$，所以

$$a^2\dot{\theta}^2 = u^2 + 2ga(1-\cos\theta).$$

對時間求導，並約去 $2a\dot{\theta}$（它不為零，因為 $\dot{\theta} \geq u/a > 0$）：

$$a\ddot{\theta} = g\sin\theta.$$

代入 (1) 得 $F = 0$：**摩擦力為零**，正如所求。

這個結果還有一個直接的理由。輪緣和輪輻都是輕的，所以作用於它們的各力對 O 的總力矩（moment）必須為零。這些力是在 E 的接觸力，以及輪轂在 O 施加的力，而後者對 O 沒有力矩。接觸力對 O 的力矩是 Fa，所以 $F = 0$。

由 (2)，法向反作用力為

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}(u^2 + 2ga(1-\cos\theta)) = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mu^2}{a}.$$

在 $\theta = 0$ 時，這個值是 $m(g - u^2/a) > 0$，因為 $u^2 < ag$，所以輪子不會立即離開桌邊。其後 R 隨 θ 增加而減少，當 $R = 0$ 時輪緣便失去接觸，即當

$$\cos\theta = \frac{2ag + u^2}{3ag},$$

這個值小於 1，因為 $u^2 < ag$。此時輪轂已下降了

$$a(1 - \cos\theta) = a \cdot \frac{3ag - 2ag - u^2}{3ag} = \frac{ag - u^2}{3g},$$

正如所求。由於自始至終 $F = 0$，不滑動的假設根本無須依靠摩擦力來維持，所以以上分析一直到這一點都成立。

第 (ii) 部分

想一想 圓環繞 E 轉動時，兩個質點在哪裏？

在 $\theta = 0$ 時，通過兩個質點的直徑是豎直的，所以下方的質點位於接觸點 E。其後圓環作為剛體繞着位於 E 的物質點轉動，而這個物質點正是該質點，所以該質點一直留在 E。另一個質點則一直留在直徑的另一端，沿 EO 方向與 E 相距 $2a$。

因此對 E 的轉動慣量是 $\frac{m}{2}(2a)^2 = 2ma^2$。圓環在桌面上以恆定速率 u 滾動（沒有任何力作功），所以在 $\theta = 0$ 時 $\dot\theta = u/a$。運動中的質點比 E 高出 $2a\cos\theta$，由能量守恆得

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\dot\theta^2 + \tfrac{m}{2}g(2a\cos\theta) = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\frac{u^2}{a^2} + \tfrac{m}{2}g(2a), \qquad \text{所以} \qquad a^2\dot\theta^2 = u^2 + ga(1 - \cos\theta).$$

求導並約去 $2a\dot\theta \neq 0$，得 $a\ddot\theta = \frac{1}{2}g\sin\theta$。於是由 (1) 得

$$F = ma\ddot\theta - mg\sin\theta = -\tfrac{1}{2}mg\sin\theta.$$

所以對每一個 $\theta > 0$，**摩擦力都不為零**。（它的大小是 $\frac{1}{2}mg\sin\theta$，方向與 O 的運動方向相反。）與 (i) 不同，現在輪緣帶有質量，所以圓環需要一個對 O 的力矩（torque），才能使它的轉動跟得上 O 的運動，而只有摩擦力能夠提供這個力矩。

由 (2)，

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}(u^2 + ga(1 - \cos\theta)) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mu^2}{a}.$$

在 $\theta = 0$ 時，$R = m(g - u^2/a) > 0$ 而 $F = 0$，所以越過桌邊的運動確實是在不滑動的情況下開始的。假如圓環一直保持接觸而不滑動，R 便會在以下角度降至零：

$$\cos\theta_1 = \frac{ag + u^2}{2ag} < 1,$$

這裏用到了 $u^2 < ag$。所以 $\theta_1 > 0$，而在該處 $|F| = \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$。

想一想 為甚麼這樣就必定會在失去接觸之前滑動？

設摩擦系數（coefficient of friction）為 μ，不滑動的條件是 $|F| \le \mu R$。當 $\theta \to \theta_1$（從下方趨近）時，$R \to 0^+$ 但 $|F| \to \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$，所以 $|F|/R \to \infty$。因此無論 μ 取甚麼（有限）值，總有一個角 $\theta < \theta_1$，在 R 仍然為正的時候，$|F|$ 就必須超過 μR。所以圓環**在與桌子失去接觸之前便會滑動**。

驗算

- 在 (i) 中，若 $u^2 \to ag$，下降的距離趨向 0：此時輪轂在 $\theta = 0$ 已處於即將飛離的臨界狀態，該處 $g = u^2/a$。若 $u \to 0$，下降的距離是 $a/3$，這正是質點從光滑球面頂點由靜止開始滑下的那個熟悉結果。
- 取 $a = 1\,\mathrm{m}$、$u = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 和 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，以數值方法逐步求解方程，在 (i) 中得出下降距離為 0.1974 m，與 $(ag - u^2)/(3g)$ 吻合。在 (ii) 中我們得出 $\cos\theta_1 = 0.7039$，而且 $|F|/R$ 在臨近 $R = 0$ 之前已超過 10^4。
- 在 (ii) 中直接由兩個質點的加速度計算接觸力（$m\ddot{\mathbf{r}}_G$ 減去重力），所得的 F 和 R 都與上面相同。

常見錯誤

- 在 (ii) 中使用對 O 的滾動動能 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$，卻忘記了一旦開始繞支點轉動，其中一個質點便固定在 E。對 E 來計算會簡潔得多。
- 在桌邊沿水平和豎直方向分解力。在邊角處，「法向」是沿半徑 EO 的方向，而不是豎直方向。
- 僅僅因為 $F \neq 0$ 便斷定「它會滑動」。論證需要的是 $R \to 0$ 而 $|F|$ 始終不趨近零。

STEP 之外

兩部分的對比在於質量的分佈：同樣的質心運動，會因轉動慣量不同而需要不同的接觸力，因為角動量（angular momentum）方程和線動量（linear momentum）方程必須同時滿足。在大學第一門力學課程中，這就發展成剛體動力學（rigid-body dynamics）：物體的運動由 $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_G$ 連同對 G 的力矩方程決定，而接觸約束（滾動、滑動、失去接觸）則要用不等式 $R \ge 0$ 和 $|F| \le \mu R$ 來檢驗。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）對這兩條方程都有透徹的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。