詳細解答

STEP III 2007，第 10 題

力學 • 斜面上的拋體

STEP III 2007，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/07-s3-q10

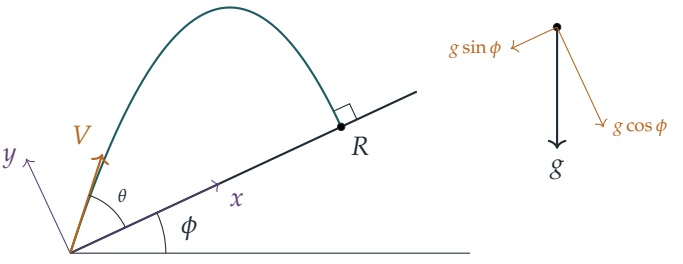
關鍵思路

取沿斜面及垂直於斜面的坐標軸，重力便化為兩個恆定的加速度：沿斜面向下的 $g\sin\phi$ 和指向斜面的 $g\cos\phi$。最特別的條件是質點沿原路折返。光滑平面只能沿垂直於自身的方向施力，所以只有當質點到達時正正垂直撞向平面，平面才能把速度完全反轉。兩個結果都由這一點得出；餘下的只是代數運算，以及一次利用算術平均—幾何平均不等式（AM–GM inequality）求最小值。

解答

運動方程

我們把質點（particle）視為只受重力作用的點質量，不計空氣阻力。重量 mg 鉛垂向下。沿斜面及垂直於斜面分解（resolve）：



加速度在 x 方向為 $-g\sin\phi$，在 y 方向為 $-g\cos\phi$，兩者皆為常數。以題目給定的初速度及起點 $(0,0)$ 積分兩次，得

$$x = Vt\cos\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\phi, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\phi.$$

沿原路折返的條件

質點首次回到平面，是在 $y = 0$ 且 $t > 0$ 之時，即

$$t = T = \frac{2V \sin\theta}{g \cos\phi}.$$

> **想一想** 「沿同一路徑返回」說明了碰撞的甚麼性質？

反彈之後，質點仍然在恆定的重力下運動。若它要沿同一條拋物線（parabola）返回原點，反彈後一刻的速度必須與反彈前一刻的速度剛好相反。（不妨想像把影片倒過來播放。）我們假設平面是光滑（smooth）的，所以它給予質點的衝量（impulse）垂直於平面：沿斜面的分量 $\dot{x}$ 不會因反彈而改變。這個分量要被反轉，唯一的可能就是它本身為零。因此質點必須垂直撞擊平面，即在 $t = T$ 時 $\dot{x} = 0$。（我們還需要反彈把 $\dot{y}$ 反轉而不損失速率，所以碰撞必須是完全彈性（perfectly elastic）的。題目把這一點視為理所當然。）

現在 $\dot{x} = V\cos\theta - gt\sin\phi$，所以由 $\dot{x}(T) = 0$ 得

$$V\cos\theta = gT\sin\phi = \frac{2V\sin\theta\sin\phi}{\cos\phi}.$$

兩邊除以 $V\cos\theta$（由於 $0 < \theta < \pi/2$，此數為正），

$$2\tan\phi\tan\theta = 1,$$

即為所求。

射程

由 $\dot{x}(T) = 0$ 可得較簡潔的形式 $T = \dfrac{V\cos\theta}{g\sin\phi}$。於是

$$\begin{aligned} R = x(T) &= V\cos\theta \cdot \frac{V\cos\theta}{g\sin\phi} - \frac{1}{2}g\sin\phi \cdot \frac{V^2\cos^2\theta}{g^2\sin^2\phi} \\ &= \frac{V^2\cos^2\theta}{g\sin\phi} - \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi} = \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi}, \end{aligned}$$

這就是所求的結果。（換一個說法：x 在 $\dot{x} = 0$ 時最大，所以落點就是這個運動沿斜面向上所能到達的最高點。）

關於 $2V^2/(gR)$ 的恆等式

由射程公式，

$$\frac{2V^2}{gR} = \frac{4\sin\phi}{\cos^2\theta} = 4\sin\phi\,(1 + \tan^2\theta).$$

利用 $\tan\theta = \dfrac{1}{2\tan\phi}$，即 $\tan^2\theta = \dfrac{\cos^2\phi}{4\sin^2\phi}$，

$$\frac{2V^2}{gR} = 4\sin\phi + \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi} = 4\sin\phi + \frac{1-\sin^2\phi}{\sin\phi} = 3\sin\phi + \operatorname{cosec}\phi.$$

最大射程

對給定的 V，R 在 $3\sin\phi + \operatorname{cosec}\phi$ 最小時最大。設 $s = \sin\phi$；由於 $0 < \phi < \pi/2$，故 $0 < s < 1$。對正數 $3s$ 和 $1/s$ 應用算術平均—幾何平均不等式，

$$3s + \frac{1}{s} \geq 2\sqrt{3s \cdot \frac{1}{s}} = 2\sqrt{3},$$

等號成立當且僅當 $3s = 1/s$，即 $s = 1/\sqrt{3}$。這個值確實落在 $(0,1)$ 之內，所以這個界可由一個真實存在的斜面達到。因此

$$\frac{2V^2}{gR} \geq 2\sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad R \leq \frac{V^2}{\sqrt{3}\,g},$$

等號在 $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$ 時成立。所以最大可能射程為 $V^2/(\sqrt{3}\,g)$。

> ? **想一想** 在最大值處，條件 $\phi + \theta < \pi/2$ 是否成立？

成立，而且事實上任何時候都成立。由 $\tan\theta\tan\phi = \frac{1}{2}$ 及兩角皆為銳角，

$$\tan(\phi+\theta) = \frac{\tan\phi + \tan\theta}{1 - \tan\phi\tan\theta} = 2(\tan\phi + \tan\theta) > 0,$$

而由於 $0 < \phi + \theta < \pi$，這就迫使 $\phi + \theta < \pi/2$。在最大值處，$\sin\phi = 1/\sqrt{3}$ 給出 $\tan\phi = 1/\sqrt{2}$，所以 $\tan\theta = 1/\sqrt{2}$ 亦然：最佳情況是 $\theta = \phi \approx 35.3°$。

驗算

- 單位：V^2/g 是長度，與射程應有的量綱相符。
- 極限情況：當 $\phi \to 0$ 時，$\operatorname{cosec}\phi \to \infty$ 而 $R \to 0$。在近乎水平的平面上，要垂直落在平面上，唯一的方法是幾乎筆直向上發射，射程自然接近零。當 $\phi \to \pi/2$ 時，平面成為一幅鉛垂的牆，$\theta \to 0$，且 $2V^2/(gR) \to 4$，所以 $R \to V^2/(2g)$：這正是質點貼着牆筆直向上拋出所達到的高度。兩者都合理。
- 數值驗算：取 $g = 9.8$、$V = 10$ 及 $\phi = 0.7$，逐步向前推算運動，落點為 $x \approx 5.8561$，與公式吻合。落地時的速度有 $\dot{x} \approx 0$，把它反轉後質點便回到原點。對 ϕ 作網格搜尋，在 $V = 1$ 時得最大值 $R \approx 0.05891$，等於 $1/(9.8\sqrt{3})$。

常見錯誤

- 把重力的兩個分量弄反了。沿斜面的分量是 $g\sin\phi$，垂直於斜面的分量是 $g\cos\phi$。可用 $\phi = 0$ 檢查。
- 說質點必須「水平地」落下，或在「最高點」落下。正確的條件是它垂直撞擊平面，即在傾斜坐標軸中 $\dot{x} = 0$。
- 忘記檢查 $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$ 能否達到。算術平均—幾何平均不等式只給出一個界，只有當等號確實可以成立時，它才是最大值。

STEP 之外

質點能沿原路折返，靠的是牛頓力學的時間可逆性（time-reversibility）。若力只取決於位置，把所有速度反轉，系統便會沿着自己的歷史倒退回去。選取配合幾何形狀的坐標軸，而不是慣用的水平和鉛垂方向，是你在大學力學中會經常用到的習慣。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對這兩個想法都有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。