詳細解答

STEP III 2007，第 1 題

純數學 • 正切和與韋達定理

> **STEP III 2007，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q1

關鍵思路

多個角之和的正切，是各個角的正切的對稱函數（symmetric function）之比；而多項式的根的對稱函數，正正就是韋達定理（Vieta's formulae）以係數表示出來的東西。至於最後一部分，竅門是把那條三角方程化為 $t = \tan\theta$ 的四次方程（quartic）；其係數的對稱性便會迫使角之和的正切等於零。

解答

四個角之和的正切

把和拆成 $A + B$，其中 $A = \theta_1 + \theta_2$，$B = \theta_3 + \theta_4$，於是

$$\tan A = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}, \qquad \tan B = \frac{t_3 + t_4}{1 - t_3 t_4}.$$

然後，把 $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ 的分子和分母同乘以 $(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4)$，得

$$\tan(A + B) = \frac{(t_1 + t_2)(1 - t_3 t_4) + (t_3 + t_4)(1 - t_1 t_2)}{(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4) - (t_1 + t_2)(t_3 + t_4)}.$$

分子是 $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - (t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4)$，而分母是 $1 - t_1 t_2 - t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 t_4 - (t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4)$。以

$$\sigma_1 = \sum t_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i<j} t_i t_j, \quad \sigma_3 = \sum_{i<j<k} t_i t_j t_k, \quad \sigma_4 = t_1 t_2 t_3 t_4$$

表示各個初等對稱函數（elementary symmetric functions），上式便是

$$\boxed{\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 - \sigma_2 + \sigma_4}.}$$

（規律與兩個角或三個角的情況相同：奇數次的對稱函數正負號交替地放在分子，偶數次的則放在分母。）

以係數表示

若 $t_1, \ldots, t_4$ 是 $at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0$ 的根，則 $at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = a(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)(t - t_4)$，比較係數（韋達定理）得

$$\sigma_1 = -\frac{b}{a}, \qquad \sigma_2 = \frac{c}{a}, \qquad \sigma_3 = -\frac{d}{a}, \qquad \sigma_4 = \frac{e}{a}.$$

代入後，分子和分母同乘以 $a \neq 0$，得

$$\boxed{\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \frac{d - b}{a - c + e}.}$$

最後一部分

由於 $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$，方程即為

$$2p\cos^2\theta + \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = 0.$$

除以 $\cos^2\theta$（我們不理會 $\cos\theta = 0$ 這個特殊情況），得

$$2p = -(\cos\alpha + t\sin\alpha)\sec\theta, \qquad t = \tan\theta.$$

$\sec\theta$ 並不是 t 的有理函數（rational function），所以我們把兩邊平方，並利用 $\sec^2\theta = 1 + t^2$：

$$4p^2 = (\cos\alpha + t\sin\alpha)^2(1 + t^2).$$

展開後，

$$\sin^2\alpha\, t^4 + 2\sin\alpha\cos\alpha\, t^3 + t^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha\, t + (\cos^2\alpha - 4p^2) = 0, \qquad (*)$$

其中 t^2 的係數用了 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$。

? **想一想** 平方可能會引入額外的解。各個 $\tan\theta_i$ 真的就是 $(*)$ 的四個根嗎？

平方之後，$p\cos 2\theta - \cos(\theta - \alpha) + p = 0$ 的解也同樣滿足 $(*)$。不過，把 θ 換成 $\theta + \pi$，$t = \tan\theta$ 和 $\cos^2\theta$ 都保持不變，而 $\cos(\theta - \alpha)$ 則會變號。因此，對於 $(*)$ 的每一個實根 t，在 $[0, 2\pi)$ 內正切等於 t 的兩個角之中，恰好有一個滿足原來的方程（不會兩個都滿足，因為那樣便需要 $\cos(\theta - \alpha) = 0$，從而 $p\cos^2\theta = 0$，屬於特殊情況）。所以，$[0, 2\pi)$ 內的解與 $(*)$ 的實根一一對應（one-to-one correspondence），而題目所給的四個角的正切，正是 $(*)$ 的四個根。

現在應用前面的結果，取 $a = \sin^2\alpha$，$b = d = 2\sin\alpha\cos\alpha$，$c = 1$，$e = \cos^2\alpha - 4p^2$（我們需要 $a \neq 0$，即 $\sin\alpha \neq 0$；否則 $(*)$ 便不是四次方程，這又是一個特殊情況）。分子是 $d - b = 0$，而分母是

$$a - c + e = \sin^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha - 4p^2 = -4p^2,$$

它不等於零（若 $p = 0$，方程只是 $\cos(\theta - \alpha) = 0$，只有兩個解）。因此

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0,$$

所以對某個整數 n 有 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = n\pi$，這正是所要證明的。

驗算

- 在四個角的公式中取 $t_3 = t_4 = 0$：公式便簡化為 $(t_1 + t_2)/(1 - t_1t_2)$，即我們熟悉的兩角公式。
- 取 $p = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = 3$，在 $[0, 2\pi)$ 上以數值方法解方程，得到四個根，它們的和除以 π 後是一個整數，誤差在 10^{-9} 以內。（並非每一組 p 和 α 都給出四個解：$p = \frac{1}{2}$、$\alpha = 1$ 便只有兩個解。）我們隨機試過的每一組 (p, α)，只要給出四個解，結果都一樣；我們亦用數以千計的隨機角和隨機四次方程驗證過兩條公式。

常見錯誤

- 韋達定理中的正負號出錯：相間的係數 b 和 d 是帶負號的。
- 試圖不經平方就直接以 $\tan\theta$ 表示 $\cos(\theta - \alpha)$，又或者平方之後沒有檢查是否混入了不想要的角。

STEP 之外

以初等對稱函數表示角之和的 tan，是一條重要定理的其中一個例子：根的每一個對稱多項式（symmetric polynomial），都是係數的多項式。這個結果也可以用複數（complex numbers）漂亮地解釋，因為 $\prod(1 + \mathrm{i}t_k) = \prod \sec\theta_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\theta_k}$，而它的實部和虛部分別是 $1 - \sigma_2 + \sigma_4$ 和 $\sigma_1 - \sigma_3$。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 深入發展了這種幾何的思考方式，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則收錄了更多同類風格的 STEP 題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。