詳細解答

STEP II 2007，第 9 題

力學 • 斜碰撞與恢復係數

> **STEP II 2007，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q9

關鍵思路

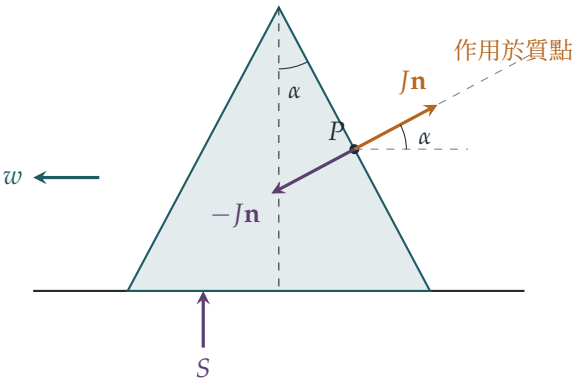
所有接觸面都是光滑的（smooth），所以質點與圓錐之間唯一的衝量（impulse）沿碰撞點的公法線（common normal）方向作用，而桌面只能沿鉛垂方向施力。由此我們同時得知兩件事：質點沿錐面方向的速度不變，而質點與圓錐合起來的水平動量（momentum）守恆。把這些與沿法線方向的牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）結合起來，便可求出圓錐的速率。第 (ii) 部分其實就是把第 (i) 部分應用於下落質點速度的法向分量。

解答

把質點視為一點，把圓錐視為剛體（rigid body）；按題目所述，圓錐既不轉動，亦不作鉛垂方向的運動，所以剛碰撞後它以某速率 w 沿水平方向滑動。我們在通過圓錐的軸和碰撞點 P 的鉛垂平面內考慮。由於通過 P 的母線（generator）與鉛垂的軸成 α 角，在 P 的向外法線與水平方向成 α 角。取單位向量

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)\text{（向外法線）}, \qquad \mathbf{t} = (\sin\alpha,\ -\cos\alpha)\text{（沿斜面向下）},$$

其中第一個坐標為水平方向（遠離軸），第二個坐標為鉛垂向上。



設作用於質點的衝量為 $J\mathbf{n}$（$J > 0$），則圓錐所受的衝量為 $-J\mathbf{n}$，其水平部分的大小為 $J\cos\alpha$，方向遠離 P。桌面提供向上的鉛垂衝量 $S = J\sin\alpha$，剛好抵消 $-J\mathbf{n}$ 的向下部分；這就是圓錐沒有鉛垂速度的原因。所以

$$Mw = J\cos\alpha, \tag{1}$$

而圓錐沿水平方向遠離 P 運動。

第 (i) 部分

質點到達時的速度為 $-u\mathbf{n}$，它沒有沿 $\mathbf{t}$ 方向的分量。由於接觸面光滑，作用於質點的衝量完全沿 $\mathbf{n}$ 方向，不能改變質點沿 $\mathbf{t}$ 方向的分量。因此碰撞後該分量仍然是零，質點的速度是 $\mathbf{n}$ 的倍數：它沿 P 處的法線運動（向外運動；又或者，若圓錐退得夠快，則仍然向內運動，只是較慢）。

碰撞後質點的速度為 $(-u + J/m)\,\mathbf{n}$。圓錐以速率 w 沿水平方向遠離 P 運動（即圖中向左），所以它的速度是 $(-w, 0)$，其沿 $\mathbf{n}$ 方向的分量為 $-w\cos\alpha$。

> **想一想** 牛頓恢復定律比較的是沿哪個方向的相對速度？圓錐在當中有甚麼貢獻？

恢復定律沿公法線 $\mathbf{n}$ 方向起作用。碰撞前，沿 $\mathbf{n}$ 方向的接近速率為 u（圓錐靜止）。碰撞後的分離速率，等於質點的 $\mathbf{n}$ 分量減去圓錐的相應分量：

$$\left(-u + \frac{J}{m}\right) - (-w\cos\alpha) = eu \quad\Longrightarrow\quad J = m\big((1+e)u - w\cos\alpha\big).$$

代入 (1)，得

$$Mw = m\cos\alpha\,\big((1+e)u - w\cos\alpha\big) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{w = \frac{m(1+e)u\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}}.$$

換一個說法，水平動量守恆（桌面的衝量是鉛垂的）：$m(-u\cos\alpha) = m\left(-u + \frac{J}{m}\right)\cos\alpha - Mw$，這又是 (1)。

第 (ii) 部分

現在質點到達時的速度為 $(0,-u)$。把它分解：

$$(0,-u)\cdot\mathbf{n} = -u\sin\alpha, \qquad (0,-u)\cdot\mathbf{t} = u\cos\alpha.$$

切向部分 $u\cos\alpha$ 不受碰撞影響（同樣因為接觸面光滑），之後亦再無作用：衝量 $J\mathbf{n}$、方程 (1) 和恢復定律的方程都只涉及法向分量。所以第 (i) 部分的推導完全適用，只需把法向接近速率 u 換成 $u\sin\alpha$：

$$w = \frac{m(1+e)(u\sin\alpha)\cos\alpha}{M+m\cos^2\alpha} = \frac{mu(1+e)\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\cos^2\alpha},$$

正是所求。

對 α 求最大值。固定 M, m, e, u，我們需要在 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 的範圍內求 $f(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\cos^2\alpha}$ 的最大值。

> ? **想一想** 直接對這個商求導相當繁複。有沒有一個代換可以令它變得簡潔？

把分子和分母同除以 $\cos^2\alpha$，並設 $T=\tan\alpha>0$，利用 $\sec^2\alpha = 1+T^2$：

$$f = \frac{\tan\alpha}{M\sec^2\alpha+m} = \frac{T}{MT^2+(M+m)} = \frac{1}{MT+\dfrac{M+m}{T}}.$$

根據算術—幾何平均不等式（AM–GM inequality）（兩項皆為正數），

$$MT+\frac{M+m}{T} \geq 2\sqrt{M(M+m)},$$

等號成立當且僅當 $MT=(M+m)/T$，即 $T^2=(M+m)/M$。所以 f 在該處取得最大值，w 亦然。由於 $T\mapsto\alpha$ 是由 $(0,\infty)$ 到 $(0,\frac{\pi}{2})$ 的雙射（bijection），這是唯一的最大值，而且

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{M+m}{M}} = \frac{M}{2M+m}, \qquad \text{所以} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{M}{2M+m}}$$

（因為 α 是銳角，故取正根）。最大速率為 $w_{\max} = \dfrac{mu(1+e)}{2\sqrt{M(M+m)}}$。

驗算

- 若 $\alpha\to\frac{\pi}{2}$，圓錐變成一塊平的圓盤：鉛垂下落不會產生水平推力，故 $w\to 0$。在第 (i) 部分中，當 $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ 時法線是鉛垂的，同樣有 $w\to 0$。吻合。

- 在第 (i) 部分中，當 $\alpha \to 0$（一面鉛垂的牆）時，我們得到 $w = \dfrac{m(1+e)u}{M+m}$，這正是與一個質量為 M 的自由方塊正碰時大家熟悉的答案。
- 若 $m \ll M$，最佳角度滿足 $\cos^2\alpha \to \frac{1}{2}$，即 $\alpha = 45°$，這正是 $\sin\alpha\cos\alpha$ 取最大值之處。
- 數值上，取 $M = 3, m = 1, e = \frac{1}{2}, u = 4, \alpha = \frac{\pi}{6}$，第 (ii) 部分給出 $w = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.693$。以隨機選取的參數直接計算衝量（由恢復定律解出 J），結果與兩條公式都一致；對 α 作網格搜尋，亦確認了取得最大值的角度。

常見錯誤

- 忘記圓錐會移動，寫恢復定律的方程時，把分離速率當成只是質點的速率 eu。圓錐的速度沿法線方向有分量 $w\cos\alpha$。
- 沿法線方向應用動量守恆。桌面的衝量沿 $\mathbf{n}$ 方向有分量，所以只有水平動量守恆。
- 以為法線與鉛垂方向成 α 角。與鉛垂方向成 α 角的是錐面，所以法線是與水平方向成 α 角。

STEP 之外

這裏的桌面起着約束（constraint）的作用：它令圓錐失去一個自由度（degree of freedom），而它的衝量則是為了維持這個約束所需的任何值。到了大學，這會發展成衝擊約束（impulsive constraints）的理論，在拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中以廣義坐標（generalised coordinates）處理十分簡潔；而向法線方向投影的做法，與受約束物體的有效質量（effective mass）背後是同一個想法。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對二維的碰撞和衝量有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。