詳細解答

STEP II 2007，第 8 題

純數學 • 以向量證明塞瓦定理

> **STEP II 2007，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q8

關鍵思路

平面上每一點都可以寫成 $\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$，而第 (i) 部分正好告訴我們這樣的點何時位於 BC 上：兩個係數之和為 1。因此，要找出一條直線與 BC（或 CA、AB）的交點，我們只需把該直線上的一般點用 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 表示，再對係數加上適當的條件。這樣每個比都可以用 β 和 γ 表示，而三者的乘積會全部約簡。

解答

在整個解答中，像 $BD:DC$ 這樣的比是指有向比（signed ratio）：若 $\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{DC}$，則 $BD/DC=k$；當 D 位於線段 BC 之外時，這個比是負數。由於 A、B、C 不共線（collinear），$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 互不平行且均非零，所以我們可以比較係數：由 $p\mathbf{b}+q\mathbf{c}=p'\mathbf{b}+q'\mathbf{c}$ 必可得出 $p=p'$ 及 $q=q'$。

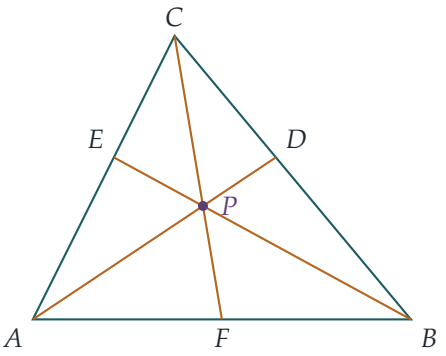
第 (i) 部分

若 $s+t=1$，則

$$s\mathbf{b}+t\mathbf{c}=(1-t)\mathbf{b}+t\mathbf{c}=\mathbf{b}+t(\mathbf{c}-\mathbf{b}),$$

這是通過 B 且方向為 $\overrightarrow{BC}$ 的直線的向量方程（vector equation），其中 t 為參數。當 t 取遍所有實數時，X 走遍整條直線。因此 X 的軌跡（locus）是通過 B 和 C 的（無限延伸的）直線；線段 BC 則是其中 $0\le t\le 1$ 的部分。

反過來，比較係數可知，點 $\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$ 位於直線 BC 上當且僅當 $\beta+\gamma=1$。這就是我們從現在起使用的判別方法。特別地，$\beta+\gamma\neq 1$ 表示 P 不在 BC 上，而 $\beta,\gamma\neq 0$ 表示 P 不在 CA 或 AB 上。



第 (ii) 部分

直線 AP 上的一般點是 $\lambda(\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}) = \lambda\beta\,\mathbf{b} + \lambda\gamma\,\mathbf{c}$。根據第 (i) 部分，它位於 BC 上正好是當 $\lambda\beta + \lambda\gamma = 1$，即

$$\lambda = \frac{1}{\beta+\gamma}.$$

（這需要 $\beta+\gamma \neq 0$。若 $\beta+\gamma = 0$，則 $\overrightarrow{AP} = \beta(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ 與 BC 平行，D 並不存在，所以題目其實隱含了 $\beta+\gamma \neq 0$ 的假設。）因此

$$\mathbf{d} = \frac{\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma}.$$

現在

$$\overrightarrow{BD} = \mathbf{d}-\mathbf{b} = \frac{\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}-(\beta+\gamma)\mathbf{b}}{\beta+\gamma} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}(\mathbf{c}-\mathbf{b}),$$
$$\overrightarrow{DC} = \mathbf{c}-\mathbf{d} = \frac{(\beta+\gamma)\mathbf{c}-\beta\mathbf{b}-\gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}(\mathbf{c}-\mathbf{b}).$$

兩者都是同一個向量 $\mathbf{c}-\mathbf{b}$ 的倍數，所以 $\beta\overrightarrow{BD} = \gamma\overrightarrow{DC}$，又因為 $\beta \neq 0$，

$$BD : DC = \gamma : \beta,$$

這正是所需的結果。

第 (iii) 部分

我們用同樣的方法求 E 和 F，不過這次的目標直線是 CA（$\mathbf{c}$ 的倍數）和 AB（$\mathbf{b}$ 的倍數）。

想一想 怎樣判斷一點 $p\mathbf{b}+q\mathbf{c}$ 是否在直線 CA 上？

直線 CA 通過原點 A，方向為 $\mathbf{c}$，所以線上的點正好就是 $\mathbf{c}$ 的所有倍數：$\mathbf{b}$ 的係數必須為零。同樣地，一點在 AB 上，正好是當它的 $\mathbf{c}$ 係數為零。

求 E。直線 BP 上的一般點是

$$\mathbf{b}+\mu(\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}-\mathbf{b})=(1-\mu(1-\beta))\mathbf{b}+\mu\gamma\,\mathbf{c}.$$

令 $\mathbf{b}$ 的係數為零，得 $\mu=1/(1-\beta)$（我們需要 $\beta\neq1$；若 $\beta=1$，則 $\overrightarrow{BP}=\gamma\mathbf{c}$ 與 CA 平行，E 並不存在）。所以

$$\mathbf{e}=e\,\mathbf{c},\qquad e=\frac{\gamma}{1-\beta}.$$

於是 $\overrightarrow{CE}=(e-1)\mathbf{c}$ 及 $\overrightarrow{EA}=-e\,\mathbf{c}$，而且因為 $\gamma\neq0$，所以 $e\neq0$，因此

$$\frac{CE}{EA}=\frac{e-1}{-e}=\frac{1-e}{e}=\frac{(1-\beta-\gamma)/(1-\beta)}{\gamma/(1-\beta)}=\frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}.$$

求 F。把 B 和 C 的角色互換（即 $\mathbf{b}\leftrightarrow\mathbf{c}$ 及 $\beta\leftrightarrow\gamma$），在假設 $\gamma\neq1$ 之下，直線 CP 與 AB 相交於 $\mathbf{f}=f\,\mathbf{b}$，其中 $f=\beta/(1-\gamma)$。於是 $\overrightarrow{AF}=f\,\mathbf{b}$ 及 $\overrightarrow{FB}=(1-f)\mathbf{b}$，其中 $1-f=(1-\beta-\gamma)/(1-\gamma)\neq0$，因為 $\beta+\gamma\neq1$。所以

$$\frac{AF}{FB}=\frac{f}{1-f}=\frac{\beta}{1-\beta-\gamma}.$$

乘積。中間的因子用第 (ii) 部分的結果，得

$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=\frac{\beta}{1-\beta-\gamma}\times\frac{\gamma}{\beta}\times\frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}=1,$$

其中每個被約去的因子都不是零，因為 $\beta\neq0$、$\gamma\neq0$ 及 $\beta+\gamma\neq1$。這就是所需的結果。（它對有向比成立，因此對長度本身也成立。）

驗算

- 形心（centroid）：取 $\beta=\gamma=\frac{1}{3}$，P 便是形心。這時 $BD:DC=1:1$、$CE/EA=\frac{1/3}{1/3}=1$ 及 $AF/FB=1$，所以三條塞瓦線（cevian）都是中線（median），正如所料。
- 取 $A=(0,0)$、$B=(4,0)$、$C=(1.5,3)$、$\beta=0.3$、$\gamma=0.4$（即圖中的情況），我們得到 $D=(2.571,1.714)$、$E=\frac{4}{7}\mathbf{c}$ 及 $F=(2,0)$，從而 $\frac{AF}{FB}=1$、$\frac{BD}{DC}=\frac{4}{3}$、$\frac{CE}{EA}=\frac{3}{4}$，乘積為 1。
- 我們以超過 1700 個隨機三角形和隨機的 β,γ（包括 P 在三角形之外的情況），用分數精確地核對了 D、E、F 的公式、全部三個有向比以及乘積。

常見錯誤

- 把 (i) 中的軌跡說成線段 BC：s 和 t 並沒有限定為正數，所以軌跡是整條直線。

- 把比倒轉了：$\overrightarrow{BD}$ 與 $\mathbf{c}$ 的係數 γ 成正比，所以 γ 大的時候，D 會被拉向 C。
- 忘記了沿 BP 和 CP 的參數是從 B 和 C 起計，而不是從原點起計。

STEP 之外

第 (iii) 部分就是塞瓦定理（Ceva's theorem），而 $(1-\beta-\gamma, \beta, \gamma)$ 是 P 相對於三角形 ABC 的重心坐標（barycentric coordinates）：它們與三角形 PBC、PCA、PAB 的面積成正比，而那三個比不過是這些面積之間的商。重心坐標是仿射幾何（affine geometry）最自然的框架：在仿射幾何中，直線以及沿直線的比都有意義，但長度和角度則沒有；重心坐標亦會在電腦圖像（computer graphics）和有限元法（finite-element method）中再次出現。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）有系統地處理相對於一組基（basis）的坐標，是很好的入門讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。