詳細解答

STEP II 2007，第 7 題

純數學 • 琴生不等式

> **STEP II 2007，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q7

本題在 *Beyond STEP* 第 3.3 節凸性的威力中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/convexity.html

關鍵思路

延森不等式（Jensen's inequality）指出：對於凹函數（concave function），函數值的平均不超過平均值處的函數值。每一部分的關鍵，都在於看出該用哪一個凹函數，以及該對哪些數取平均。就三角形而言，各角之和固定，所以它們的平均值是已知的。至於算術—幾何平均不等式（AM–GM inequality），對數（logarithm）能把積化為和。(a) 和 (b) 兩部分則需要選對代入 AM–GM 的一組數，當中包括一些常數。

解答

凹性

若 $f(x) = \sin x$，則 $f''(x) = -\sin x$。當 $0 < x < \pi$ 時，$\sin x > 0$，所以 $f''(x) < 0$，故 $\sin x$ 在該區間上是凹的。

若 $f(x) = \ln x$，則 $f'(x) = 1/x$ 及 $f''(x) = -1/x^2$。對所有 $x > 0$，這都是負數，所以 $\ln x$ 在 $x > 0$ 時是凹的。

第 (i) 部分

三角形的各角滿足 $A, B, C > 0$ 及 $A + B + C = \pi$，所以每個角都在 $(0, \pi)$ 之內，而 sin 在此區間上是凹的。取 $n = 3$，由延森不等式得

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A + B + C}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

兩邊乘以 3，

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

正是所求。等號成立當且僅當 $A = B = C = \pi/3$，即等邊三角形。

第 (ii) 部分

取 $f(x) = \ln x$，它在 $x > 0$ 上是凹的，並設 $x_k = t_k > 0$。由延森不等式得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln t_k \leq \ln\left(\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}\right).$$

左邊等於 $\frac{1}{n}\ln(t_1 t_2 \cdots t_n) = \ln\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}$。由於 e^x 是遞增函數，我們可以對兩邊取指數而不改變不等號的方向：

$$\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n} \leq \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n},$$

等號成立當且僅當 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$。（當 $n = 1$ 時，這顯然是等式，與上述結論一致。）

(a)

? **想一想** 我們應該對哪四個數取平均？

左邊有四項，所以取 $n = 4$。我們需要幾何平均（geometric mean）得出 xyz，而 x^4, y^4, z^4 給出 $\sqrt[4]{x^4 y^4 z^4} = xyz$。常數 16 就是第四項，而 $\sqrt[4]{16} = 2$。因此取 $t_1 = x^4$，$t_2 = y^4$，$t_3 = z^4$，$t_4 = 16$，全部為正數：

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 16}{4} \geq \sqrt[4]{16\, x^4 y^4 z^4} = 2xyz,$$

其中取四次方根時用到 $x, y, z > 0$。兩邊乘以 4 得

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16 \geq 8xyz,$$

正是所求。等號成立需要 $x^4 = y^4 = z^4 = 16$，即 $x = y = z = 2$。

(b) 現在出現的是五次方，所以我們取 $n = 5$，並讓 x^5, y^5, z^5 成為其中三個數。要令五次方根恰好得出 xyz，其餘兩個數的積必須是 1。最自然的選擇是 $t_4 = t_5 = 1$：

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5 + 1 + 1}{5} \geq \sqrt[5]{x^5 y^5 z^5 \cdot 1 \cdot 1} = xyz.$$

移項整理後，

$$x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz \geq -2$$

對所有正數 x, y, z 成立。

想一想 這是否已證明最小值是 -2？

單憑這一點並不足夠：下界（lower bound）必須能夠取到，才是最小值。AM–GM 的等號在五個數全部相等時成立，即 $x^5 = y^5 = z^5 = 1$，所以 $x = y = z = 1$。此時該式的值為 $1 + 1 + 1 - 5 = -2$。因此最小值是

$$\boxed{-2}, \quad \text{取得於} x = y = z = 1.$$

驗算

- 在 (i) 中，等腰直角三角形給出 $1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2.414$，小於 $3\sqrt{3}/2 \approx 2.598$。隨機抽取 200 000 個三角形，結果從未超過 2.598。
- 在 (a) 中，當 $x = y = z = 2$ 時，兩邊都等於 64。
- 在 (b) 中，從隨機起點出發進行數值最小化，結果總是收斂到 $(1, 1, 1)$，其值為 -2。此外，$x = y = z = 1.1$ 給出 $3(1.61051) - 5(1.331) \approx -1.82 > -2$。

常見錯誤

- 忘記了取指數之所以保持不等號方向，全因 e^x 是遞增函數；這一點值得寫上一句說明。
- 在 (b) 中，寫到「≥ -2」便停筆，沒有舉出令該式達到 -2 的 x、y、z 的值。
- 對 x^5, y^5, z^5 使用 $n = 3$ 的 AM–GM，這樣只會得到 $x^5 + y^5 + z^5 \geq 3(xyz)^{5/3}$，無法與 $5xyz$ 直接比較。

STEP 之外

延森不等式是關於凸（convex）函數或凹函數的命題，它真正的歸宿是分析學和概率論：用期望值（expectation）的語言來說，它就是對凹函數 f 有 $\mathrm{E}[f(X)] \leq f(\mathrm{E}[X])$。(a) 和 (b) 中的技巧，即補上常數令幾何平均恰好符合所需，正是加權 AM–GM 不等式和赫爾德（Hölder）不等式理論的起點。想進一步了解不等式和凸性，可參閱 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）；至於概率版本，可參閱 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。