詳細解答

STEP II 2007，第 6 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP II 2007，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q6

關鍵思路

第 (i) 部分給出兩個函數，它們的導數（derivative）的分母都是 $\sqrt{3+x^2}$；把兩者適當地組合起來，所得的導數正好是 $\sqrt{3+x^2}$ 本身的倍數，於是所求的積分（integral）便唾手可得。第 (ii) 部分的微分方程（differential equation）是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的二次方程。解這個二次方程，便得到兩條普通的一階方程，而每一條所需的正是第 (i) 部分的積分。

解答

第 (i) 部分

設 $s=\sqrt{3+x^2}$，則對任何實數 x 都有 $s>0$，並且 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{s}$。另外，由於 $s>|x|$，所以 $x+s>0$，因此該對數對所有 x 都有定義。

根據鏈式法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+s)=\frac{1+\dfrac{x}{s}}{x+s}=\frac{\dfrac{s+x}{s}}{x+s}=\frac{1}{\sqrt{3+x^2}}.$$

根據積法則（product rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xs)=s+x\cdot\frac{x}{s}=\frac{s^2+x^2}{s}=\frac{3+2x^2}{\sqrt{3+x^2}}.$$

> ? **想一想** 這兩個導數怎樣給出 $\int\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x$？

我們希望分母為 s 而分子為 $3+x^2$，因為 $\dfrac{3+x^2}{s}=s$。第二個導數的分子是 $3+2x^2$；加

上第一個導數的 3 倍，便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(xs+3\ln(x+s)\Big)=\frac{3+2x^2+3}{s}=\frac{2(3+x^2)}{s}=2\sqrt{3+x^2}.$$

因此

$$\int\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}x\sqrt{3+x^2}+\tfrac{3}{2}\ln(x+\sqrt{3+x^2}\,)+C.$$

第 (ii) 部分

設 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。原方程就是 p 的二次方程 $3p^2+2xp-1=0$，所以

$$p=\frac{-2x\pm\sqrt{4x^2+12}}{6}=\frac{-x\pm\sqrt{3+x^2}}{3}.$$

判別式（discriminant）$4x^2+12$ 恆為正數，所以在每一個 x 處都有兩個相異實根。兩根之差 $\frac{2}{3}\sqrt{3+x^2}$ 永不為零，所以一個解不可能中途由一個根轉到另一個根。（導數具有介值性質（intermediate value property），所以它不可能在兩個始終相差最少 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 的值之間跳躍。）因此，每一個解都對所有 x 滿足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3+x^2}\qquad\text{或}\qquad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3+x^2}$$

其中之一。利用第 (i) 部分的結果積分，

$$y=-\frac{x^2}{6}\pm\Big(\tfrac{1}{6}x\sqrt{3+x^2}+\tfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{3+x^2}\,)\Big)+C.$$

當 $x=1$ 時，$\sqrt{3+x^2}=2$，而 $\ln(x+\sqrt{3+x^2})=\ln 3$。

取 $+$ 號：由 $y(1)=0$ 得 $0=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln 3+C$，所以 $C=-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\ln 3$。把對數項合併，

$$y=\frac{x\sqrt{3+x^2}-x^2-1}{6}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

取 $-$ 號：由 $y(1)=0$ 得 $0=-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 3+C$，所以 $C=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 3$，於是

$$y=\frac{3-x^2-x\sqrt{3+x^2}}{6}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

這就是通過 $(1,0)$ 的兩個解，兩者對所有實數 x 都成立。

驗算

- 把 $x=1$ 代入每個答案：分式部分是 $\frac{2-1-1}{6}=0$（或 $\frac{3-1-2}{6}=0$），而 $\ln\frac{1+2}{3}=0$。所以兩個答案都有 $y(1)=0$。

- p 的兩個根之和是 $-\frac{2x}{3}$，所以兩個解之和應為 $\frac{1-x^2}{3}$。平方根項和對數項確實互相抵消，剩下的正好是 $\frac{2-2x^2}{6} = \frac{1-x^2}{3}$。
- 數值上，用辛普森法則（Simpson's rule）可得 $\int_{-1}^{2} \sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x \approx 5.949681$，與第 (i) 部分的公式吻合。用龍格－庫塔法（Runge–Kutta）把方程的每一個分支由 $(1,0)$ 逐步計算至 $x = 4$，得 $y \approx 0.584957$ 和 $y \approx -5.584957$，與兩條公式吻合。（兩者之和是 $-5 = \frac{1-16}{3}$。）

常見錯誤

- 把 $3p^2 + 2xp = 1$ 當作線性方程處理，或嘗試分離變數（separate variables），而不是把它當作 p 的二次方程來解。
- 兩個分支共用同一個常數 C。每個符號都需要各自的常數，並由 $y(1) = 0$ 確定。
- 漏掉 $\sqrt{3+x^2}$ 前面的因子 $\frac{1}{3}$，以致使用第 (i) 部分的積分時倍數出錯。

STEP 之外

形如 $F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$ 而對導數並非線性的方程，稱為隱式（implicit）方程。通過同一點可以有多個解，方程中 p 的每一個根各對應一個。在兩個根重合之處，可能出現奇解（singular solutions），即一族曲線的包絡線（envelope），克萊羅方程（Clairaut's equation）便是一例。本題的兩個根永不重合，所以恰好有兩個解。第 (i) 部分的 $\ln\left(x + \sqrt{3+x^2}\right)$ 等於 $\operatorname{arsinh}(x/\sqrt{3})$ 加上一個常數，而該積分其實就是標準的代換（substitution）$x = \sqrt{3}\sinh u$，只是換了個面貌。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）涵蓋一階方程，以及其解的存在性與唯一性（existence and uniqueness）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。