詳細解答

STEP II 2007，第 5 題

純數學 • 迭代函數

> **STEP II 2007，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q5

關鍵思路

$\dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$ 這個形狀，正是 $\tan(A+B)$ 的複角公式（compound-angle formula），其中 $\tan B = \sqrt{3}$，即 $B = \frac{\pi}{3}$。所以 f 的作用不過是把角度加上 $\frac{\pi}{3}$；而 tan 的週期（period）是 π，因此走三步便回到起點。第 (iii) 部分可以用同一招，只是換成 sin 和 $\frac{\pi}{6}$，但當中有個陷阱：$\sqrt{1-t^2}$ 只有在角度位於 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 之內時才是餘弦，而這一點會改變答案。

解答

第 (i) 部分

設 $y = f(x) = \dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$。那麼 $f^2(x) = \dfrac{y+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,y}$，把分子和分母同乘以 $1-\sqrt{3}\,x$，得

$$f^2(x) = \frac{(x+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1-\sqrt{3}\,x)}{(1-\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}-2x}{-2-2\sqrt{3}\,x} = \frac{x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,x}.$$

現在再應用 f 一次，這次取 $y = f^2(x)$，並把分子和分母同乘以 $1+\sqrt{3}\,x$：

$$f^3(x) = \frac{(x-\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\,x)}{(1+\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})} = \frac{4x}{4} = x.$$

所以 f^3 是恆等映射（identity）。（題目排除的那兩個點，正好保證每一步都有定義：$f(x)$ 需要 $x \neq 1/\sqrt{3}$，$f^2(x)$ 需要 $x \neq -1/\sqrt{3}$，而 f 把 $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1/\sqrt{3}\}$ 映滿到它自身，所以我們可以一直做下去。）

由於 $2007 = 3 \times 669$，

$$f^{2007}(x) = (f^3)^{669}(x) = x.$$

第 (ii) 部分

設 $x = \tan\theta$。對任何使 $\tan\alpha$ 有定義且 $1 - \sqrt{3}\tan\alpha \neq 0$ 的角 α，利用 $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 和複角公式可得

$$f(\tan\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}} = \tan(\alpha + \tfrac{\pi}{3}).$$

取 $\alpha = \theta$，這就是 $n = 1$ 的情況。若 $f^k(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}k\pi)$，則以 $\alpha = \theta + \frac{1}{3}k\pi$ 代入上述公式，得

$$f^{k+1}(x) = f(\tan(\theta + \tfrac{1}{3}k\pi)) = \tan(\theta + \tfrac{1}{3}(k+1)\pi),$$

所以根據歸納法（induction），對每個正整數 n 都有 $f^n(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}n\pi)$。

整個過程不會出問題：公式只會在某個角 $\theta + \frac{1}{3}k\pi$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{6}$ 模（modulo）π 同餘時失效，而這會迫使 $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ 或 $\pm\frac{\pi}{2}$，即 $x = \pm 1/\sqrt{3}$ 或 x 為無窮大，這些情況都已被排除。這也解釋了第 (i) 部分：加三次 $\frac{\pi}{3}$ 就是加上 π，即 tan 的週期。

第 (iii) 部分

由於 $|t| \leq 1$，我們可以寫 $t = \sin\varphi$，其中 $\varphi = \arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。

想一想 $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ 是否總是等於 $\cos\alpha$？

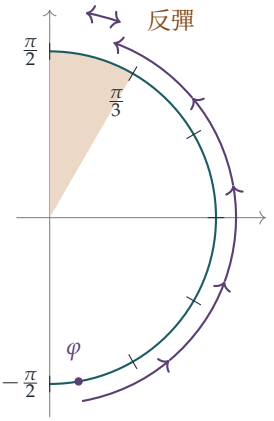
只有當 $\cos\alpha \geq 0$ 時才是。對於角 $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，這沒有問題，所以

$$g(\sin\alpha) = \cos\tfrac{\pi}{6}\sin\alpha + \sin\tfrac{\pi}{6}\cos\alpha = \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{6}). \qquad (*)$$

要再次應用 $(*)$，我們必須把結果改寫成 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 內某個角的 sin。這裏分兩種情況。

- 若 $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$，則 $\alpha + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ 已經在範圍之內。
- 若 $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$，則 $\alpha + \frac{\pi}{6}$ 可能會超過 $\frac{\pi}{2}$，但 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sin\big(\pi - \alpha - \frac{\pi}{6}\big) = \sin\big(\frac{5\pi}{6} - \alpha\big)$，而且 $\frac{5\pi}{6} - \alpha \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$。

（當 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 時，兩者都給出 $\frac{\pi}{2}$。）所以這個範圍內的角每次上升 $\frac{\pi}{6}$，直至進入 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$；此後它便按 $\alpha \mapsto \frac{5\pi}{6} - \alpha$ 被反射，而再反射一次就會還原：這個角在兩個值之間來回反彈。



每應用一次 g，角就沿單位圓的右半邊移動 $\frac{\pi}{6}$；一旦進入陰影區域 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$，它便來回翻轉。

現在設 m 為所需的上升次數，即滿足 $\varphi + \frac{m\pi}{6} \geq \frac{\pi}{3}$ 的最小整數 $m \geq 0$。由於 $\varphi \geq -\frac{\pi}{2}$，故 $m \leq 5$；以 t 表示則為：

t	$[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$	$[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$[0, \frac{1}{2})$	$[-\frac{1}{2}, 0)$	$[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
m	0	1	2	3	4	5

寫 $g^n(t) = \sin\varphi_n$，其中 $\varphi_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，且 $\varphi_0 = \varphi$。當 $n \leq m$ 時，之前的每個角都小於 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\varphi_n = \varphi + \frac{n\pi}{6}$。於是 $\varphi_m \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$，所以 $\varphi_{m+1} = \frac{5\pi}{6} - \varphi_m$，$\varphi_{m+2} = \varphi_m$，如此類推，交替出現。由於 $\sin\varphi_{m+1} = \sin(\varphi_m + \frac{\pi}{6}) = \sin\big(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6}\big)$，我們得到（其中 $\varphi = \arcsin t$，m 取自上表）

$$g^n(t) = \begin{cases} \sin\big(\varphi + \frac{n\pi}{6}\big), & n \leq m+1, \\ \sin\big(\varphi + \frac{m\pi}{6}\big), & n > m+1,\ n-m \text{ 為偶數}, \\ \sin\big(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6}\big), & n > m+1,\ n-m \text{ 為奇數}. \end{cases}$$

特別地，對每個 t 和每個 $n \geq 5$，都有 $g^{n+2}(t) = g^n(t)$。

例如，$t = 0$ 時 $\varphi = 0$，$m = 2$，其軌道（orbit）為 $0 \mapsto \frac{1}{2} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \cdots$。

驗算

- 取 $x = 1$：$f(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$，$f^2(1) = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$，且 $f(\sqrt{3}-2) = 1$，與 $\tan\frac{\pi}{4}$、$\tan\frac{7\pi}{12}$、$\tan\frac{11\pi}{12}$ 相符。
- 直接計算，$g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ 及 $g(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$：反彈確實存在。想當然地猜 $g^5(0)$ 等於 $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 是錯的；逐次迭代得到的是 1。

- 數值上，從 5000 個隨機的 $t \in [-1,1]$ 出發，把 g 迭代十九次，結果與方框內的公式相差不超過 2×10^{-12}。

常見錯誤

- 在 (iii) 中對所有 n 都答 $\sin(\varphi + \frac{n\pi}{6})$。這忽略了 $\sqrt{1-t^2} \geq 0$，所以角永遠不能越過 $\frac{\pi}{2}$。
- 計算 f^2 時的運算失誤：應先把分子和分母同乘以 $1 - \sqrt{3}\,x$，然後才化簡。

STEP 之外

形如 $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ 的映射稱為莫比烏斯變換（Möbius transformation），而把兩個這樣的變換複合，就相當於把它們的矩陣 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ 相乘。這裏 f 的矩陣是 $2\left(\begin{smallmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{smallmatrix}\right)$，即一個經縮放、轉角為 $\frac{\pi}{3}$ 的旋轉，它的三次方是單位矩陣的倍數，這就是 $f^3(x) = x$ 的原因。第 (iii) 部分讓我們淺嘗動力系統（dynamical systems）的滋味：那些點是最終週期（eventually periodic）的，而不是週期的。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以幾何直觀講解複分析的著作）對莫比烏斯變換有十分優美的幾何處理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。