詳細解答

STEP II 2007，第 4 題

純數學 • 三角方程

> **STEP II 2007，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q4

關鍵思路

用複角公式（compound-angle formulae）把所有項展開，再除以 $\cos A \cos B$：方程便化成關於 $t = \tan A$ 和 $u = \tan B$ 的關係式，其中有一個 tu 項、一個 t 項、一個 u 項和一個常數項。這樣的式子能因式分解（factorise）成兩個一次括號之積，當且僅當「配成矩形」之後沒有餘項，而這個餘項原來是 $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$ 的倍數。其後三條方程都有 $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{3}$, $\gamma = 1$，它們滿足這個條件；唯一要做的工夫就是正確地選取 A 和 B。

解答

因式分解

由複角公式，

$$\begin{aligned}&\alpha \sin(A-B) + \beta\cos(A+B) - \gamma\sin(A+B)\\ &\quad = \alpha(\sin A\cos B - \cos A\sin B) + \beta(\cos A\cos B - \sin A\sin B)\\ &\qquad - \gamma(\sin A\cos B + \cos A\sin B).\end{aligned}$$

由於 $\cos A \cos B \neq 0$，我們可以除以它。記 $t = \tan A$, $u = \tan B$，則方程等價於 $P(t,u) = 0$，其中

$$P(t,u) = \alpha(t-u) + \beta(1-tu) - \gamma(t+u) = -\beta tu + (\alpha-\gamma)t - (\alpha+\gamma)u + \beta.$$

由於 $\beta \neq 0$，設

$$m = -\frac{\alpha+\gamma}{\beta}, \qquad n = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}.$$

於是 $-\beta(t-m)(u-n) = -\beta tu + \beta n\,t + \beta m\,u - \beta mn = -\beta tu + (\alpha-\gamma)t - (\alpha+\gamma)u + \dfrac{\alpha^2-\gamma^2}{\beta}$，除常數項外與 P 完全吻合。因此，對所有 t 和 u，

$$P(t,u) = -\beta(t-m)(u-n) + \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\beta}. \qquad (*)$$

充分性。當 $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ 時，$(*)$ 中的常數項為零，所以（因為 $\beta \neq 0$）方程就是 $(\tan A - m)(\tan B - n) = 0$，其中 m 和 n 只取決於 α, β, γ。

必要性。假設方程可化為 $(t-m')(u-n') = 0$，其中 m', n' 為常數，即 $P(t,u) = 0$ 成立當且僅當 $t = m'$ 或 $u = n'$。記 $c = (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)/\beta$，並假設 $c \neq 0$。這時每一對 (m', u) 都是解，所以 $P(m',u) = -\beta(m'-m)(u-n) + c$ 對每個 u 都等於零。若 $m' \neq m$，這是 u 的一個非常數線性函數（linear function），不會恆等於零；若 $m' = m$，它等於 $c \neq 0$，永不為零。無論哪種情況都得出矛盾，所以 $c = 0$，即 $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$。（若把「可化為」理解成「$P$ 是 $(t-m)(u-n)$ 的常數倍」，比較 tu 的係數便知這個倍數必為 $-\beta$，然後 $(*)$ 同樣迫使 $c = 0$。）

想一想 在下面各部分中，如果 $\cos x = 0$，即我們不能作除法的時候，會發生甚麼事？

把 $(*)$ 兩邊乘回 $\cos A \cos B$。當 $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ 時，我們得到

$$\alpha\sin(A-B) + \beta\cos(A+B) - \gamma\sin(A+B) = -\beta(\sin A - m\cos A)(\sin B - n\cos B), \qquad (**)$$

這時兩邊都只是正弦和餘弦的組合，所以這個恆等式（identity）對所有 A 和 B 都成立（兩邊都是連續的，而且只要 $\cos A\cos B \neq 0$ 便相等）。使用 $(**)$，我們就毋須另外處理 $\cos A = 0$ 的情況。

在全部三個部分中，$\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}, \gamma = 1$，而 $\alpha^2 = 4 = \beta^2+\gamma^2$。所以

$$m = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}, \qquad n = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

方程就是 $(\sin A + \sqrt{3}\cos A)(\sin B - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos B) = 0$。留意 $\sin A + \sqrt{3}\cos A = 0$ 必然令 $\cos A \neq 0$（否則 $\sin A = 0$ 亦成立），所以它等同於 $\tan A = -\sqrt{3}$；同樣地，第二個括號為零當且僅當 $\tan B = \frac{1}{\sqrt{3}}$。

第 (i) 部分

取 $A = x$ 及 $B = \frac{1}{4}\pi$，使得 $A - B = x - \frac{1}{4}\pi$ 及 $A + B = x + \frac{1}{4}\pi$。由於 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1 \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$，第二個括號不為零，所以我們需要 $\tan x = -\sqrt{3}$：

$$x = \tfrac{2}{3}\pi \quad \text{或} \quad x = \tfrac{5}{3}\pi.$$

第 (ii) 部分

現在 $A = x$ 及 $B = \frac{1}{6}\pi$。但 $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} = n$，所以第二個括號是 $\sin\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$。由 $(**)$，左方減右方恆等於零：這條方程是一個恆等式，每一個滿足 $0 \le x < 2\pi$ 的 x 都是解。

第 (iii) 部分

我們需要 $A - B = x + \frac{1}{3}\pi$ 及 $A + B = 3x$。兩式相加和相減，得

$$A = 2x + \tfrac{1}{6}\pi, \qquad B = x - \tfrac{1}{6}\pi.$$

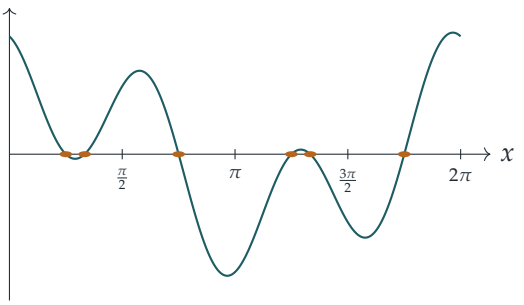
所以解由 $\tan(2x + \frac{1}{6}\pi) = -\sqrt{3}$ 或 $\tan(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 給出。

對於前者，$2x + \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi + k\pi$，所以 $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$，其中 k 為整數。在 $[0, 2\pi)$ 內，這給出 $x = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$。

對於後者，$x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k\pi$，所以 $x = \frac{1}{3}\pi + k\pi$，給出 $x = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$。

這六個值互不相同，所以解為

$$x = \tfrac{1}{4}\pi,\ \tfrac{1}{3}\pi,\ \tfrac{3}{4}\pi,\ \tfrac{5}{4}\pi,\ \tfrac{4}{3}\pi,\ \tfrac{7}{4}\pi.$$



(iii) 的左方減右方的圖像，恰好在標示的六個點穿過零。

驗算

- 在 (i) 中，當 $x = \frac{2}{3}\pi$ 時：$2\sin\frac{5}{12}\pi \approx 1.932$，$\sqrt{3}\cos\frac{11}{12}\pi \approx -1.673$，而 $\sin\frac{11}{12}\pi \approx 0.259$；的確 $1.932 - 1.673 = 0.259$。
- 在 (ii) 中，試 $x = 0$：$2\sin(-\frac{1}{6}\pi) + \sqrt{3}\cos\frac{1}{6}\pi = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = \sin\frac{1}{6}\pi$。其他任何 x 也同樣成立。
- 在 (iii) 中，當 $x = \frac{1}{4}\pi$ 時：$2\sin\frac{7}{12}\pi \approx 1.932$，而 $\sin\frac{3}{4}\pi - \sqrt{3}\cos\frac{3}{4}\pi \approx 0.707 + 1.225 = 1.932$。在 $[0, 2\pi)$ 上以數值方法搜尋根，找到的正好是上述六個根。

常見錯誤

- 在 (iii) 中取 $A = x + \frac{1}{3}\pi$，並由 $3x$ 得出 B：你必須聯立求解 $A - B = x + \frac{1}{3}\pi$, $A + B = 3x$。
- 在 (iii) 中只取到 $k = 0, 1$ 便停下而漏掉解：$\tan(2x + \frac{1}{6}\pi)$ 的週期是 $\frac{1}{2}\pi$，所以該括號給出四個解。
- 沒有察覺 (ii) 是恆等式，反而去找個別的解。

STEP 之外

式子 $-\beta tu + (\alpha - \gamma)t - (\alpha + \gamma)u + \beta$ 是圓錐曲線（conic）的一種退化情況：它的零點集是一條等軸雙曲線（rectangular hyperbola），除非某個類似行列式（determinant）的量為零，這時它便分裂成兩條直線。判斷一個二次型（quadratic form）何時可以因式分解，是用矩陣和特徵值（eigenvalues）為圓錐曲線分類的第一步，這是大學一年級線性代數（linear algebra）的課題；見 Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教科書）。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）中有更多同類風格的三角方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。