詳細解答

STEP II 2007，第 3 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2007，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/07-s2-q3

關鍵思路

一切都建基於 $1/(a^2+x^2)$ 的標準積分（standard integral），所以整道題的重點，就是在代換（substitution）之後認出這個形狀。在 (i)(a) 中，分子（numerator）$\cos x$ 正是 $\sin x$ 的導數（derivative），這是個很強的提示。在 (i)(b) 中，半角代換（half-angle substitution）把 $1+\sin^2 x$ 變成 t 的四次式（quartic），而關鍵在於看出同樣的做法可以倒過來用：在 (ii) 中，我們要找出哪一個三角積分會產生新的四次式。

解答

標準積分

設 $a \neq 0$，並取 $x = a\tan\theta$，其中 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$。當 θ 走遍這個區間時，x 恰好取遍每個實數一次（不論 a 的正負），所以這個代換是有效的，而且由 $\tan\theta = x/a$ 可得 $\theta = \arctan(x/a)$。現在 $\mathrm{d}x = a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，而

$$a^2 + x^2 = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta,$$

所以

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{a} + \text{常數} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \text{常數},$$

這正是所要證明的結果。

第 (i)(a) 部分

代入 $u = \sin x$，則 $\mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x$，而當 x 由 0 變到 $\frac{1}{2}\pi$ 時，u 由 0 變到 1。利用標準積分並取 $a = 1$，

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[\arctan u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

第 (i)(b) 部分

取 $t = \tan\frac{1}{2}x$，便有以下標準的半角結果

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

最後一式是因為 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1+t^2)$。積分上下限（limits）$x = 0$ 和 $x = \frac{1}{2}\pi$ 分別變成 $t = 0$ 和 $t = \tan\frac{1}{4}\pi = 1$。接着，

$$1 + \sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+6t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

把各部分合起來，$1+t^2$ 的因子完全約去：

$$I = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)^2}{1+6t^2+t^4}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

兩邊除以 2，便得 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}I$，這正是所要證明的結果。（由 (i)(a)，它的值是 $\pi/8$。）

第 (ii) 部分

> **想一想** 四次式 $1+14t^2+t^4$ 可能是從哪裏來的？

在 (i)(b) 中，$6t^2$ 的來源是：把 $1+t^2$ 平方得到的 $2t^2$，再加上由 $\sin^2 x$ 得到的 $4t^2 = (2t)^2$。要得到 $14t^2$，我們需要額外的 $12t^2 = 3(2t)^2$，也就是以 $3\sin^2 x$ 取代 $\sin^2 x$。事實上，取 $t = \tan\frac{1}{2}x$，

$$1 + 3\sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 12t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+14t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

因此，把 (i)(b) 的計算原封不動地重做一次，只是以 $1+3\sin^2 x$ 取代 $1+\sin^2 x$，便得

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{1+3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

仿照 (i)(a)，用 $u = \sin x$ 計算左邊：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+3u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{3}+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\Big[\arctan\left(\sqrt{3}\,u\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

這裏用了標準積分，並取 $a = 1/\sqrt{3}$。取其一半，

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}.$$

驗算

用辛普森法則（Simpson's rule）可得 $I \approx 0.785398$（即 $\pi/4$），(i)(b) 的積分 ≈ 0.392699（即 $\pi/8$），而 (ii) 的積分 ≈ 0.302300，與 $\sqrt{3}\,\pi/18 \approx 0.302300$ 吻合。再做一個簡單的合理性檢查：兩個四次式的被積函數（integrand）在 $t = 0$ 時都等於 1，在 $t = 1$ 時都等於 0，而分母含 $14t^2$ 的那個在整個區間上都較小，所以它的積分應該小於 $\pi/8 \approx 0.393$，事實也確是如此。

常見錯誤

- 忘記了來自 $\mathrm{d}x$ 的因子 $\frac{2}{1+t^2}$，以致漏掉 (i)(b) 中的因子 2。
- 寫成 $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+3u^2} = \arctan(\sqrt{3}u)$ 而漏掉因子 $\frac{1}{\sqrt{3}}$；應先把 3 提出來，或者代入 $v = \sqrt{3}u$。
- 代換之後仍然沿用 x 的上下限：$x = \frac{1}{2}\pi$ 對應的是 $t = 1$。

STEP 之外

還有一條直接的路徑：把分子和分母同時除以 t^2，再取 $v = t + 1/t$，便可把 $\frac{1-t^2}{1+kt^2+t^4}$ 變成 $-\frac{1}{v^2+k-2}$，這又是一個 arctan 積分。這裏帶出的一般道理是：$\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函數（rational function），在代換 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 之下總會變成 t 的有理函數，因而原則上總是可以積分的；這正是以初等函數表示積分的系統理論的起點。想做更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。