詳細解答

STEP II 2007，第 2 題

純數學 • 三次曲線與面積

> **STEP II 2007，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q2

關鍵思路

三次曲線（cubic）轉向點（turning point）的一切資料，都藏在它的導數（derivative）裏。由於轉向點位於 $x = p$ 和 $x = q$，導數必定是 $(x-p)(x-q)$ 的倍數，比較係數（comparing coefficients）便立即得出 b 和 c。之後，求 $m-n$ 最簡潔的方法，是把導數在兩個轉向點之間積分（integrate）；而只要留意到 $y-n$ 在 $x = q$ 處有一個二重根（double root），面積也就容易計算了。

解答

第 (i) 部分

求導，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x^2 - 2bx + c.$$

這個二次式在轉向點 $x = p$ 和 $x = q$ 處等於零，而它的首項係數是 6，所以

$$6x^2 - 2bx + c = 6(x-p)(x-q) = 6x^2 - 6(p+q)x + 6pq.$$

比較係數，得

$$b = 3(p+q), \qquad c = 6pq.$$

以下兩項事實稍後會用到。第一，由於 x^3 的係數為正，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6(x-p)(x-q)$ 在兩根之外為正，在兩根之間為負，所以曲線先升、後降、再升：極大點（maximum）在先，故 $p < q$。

第二，條件 $n > 0$ 對 q 有所限制。代入 $x = q$，

$$n = 2q^3 - 3(p+q)q^2 + 6pq^2 = q^2(3p - q),$$

所以 $n > 0$ 即 $q < 3p$。綜合起來，$0 < p < q < 3p$。

第 (ii) 部分

曲線通過原點，而且

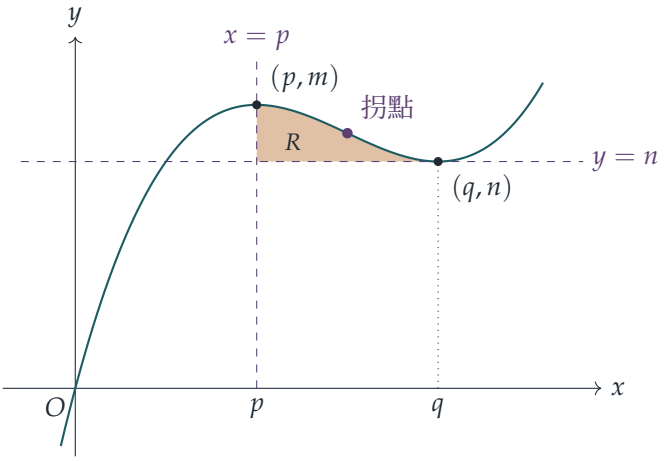
$$y = x(2x^2 - bx + c),$$

其中二次因式的判別式（discriminant）為

$$b^2 - 8c = 9(p+q)^2 - 48pq = 3(3p - q)(p - 3q).$$

由於 $q < 3p$ 及 $p < q < 3q$，第一個括號為正，第二個括號為負，所以判別式為負，原點是曲線與 x 軸唯一的交點。因此曲線由 $-\infty$ 向上而來，在 O 穿過橫軸，升至極大點 (p, m)，再降至極小點（minimum）(q, n)（此時仍在橫軸上方），然後一直上升。

拐點（point of inflection）位於 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x - 2b = 0$ 之處，即 $x = \frac{b}{6} = \frac{1}{2}(p+q)$，正好在兩個轉向點的正中間。



區域 R（陰影部分）位於 $x = p$ 與 $x = q$ 之間，在曲線之下、直線 $y = n$ 之上；曲線在極小點處與 $y = n$ 相切。

對稱性。設 $s = \frac{1}{2}(p+q)$，$h = q - p$，並令 $x = s + t$，即從拐點起量度。於是 $x - p = t + \frac{1}{2}h$ 及 $x - q = t - \frac{1}{2}h$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6\left(t^2 - \tfrac{1}{4}h^2\right),$$

這是 t 的偶函數（even function）。因此它由 0 起的積分，即 $y - y(s) = 2t^3 - \frac{3}{2}h^2t$，是 t 的奇函數（odd function）。所以 $y(s+t) - y(s) = -\big(y(s-t) - y(s)\big)$：曲線具有繞其拐點的 2 階旋轉對稱（*rotational symmetry*）（繞該點旋轉半周，曲線與自身重合）。特別地，這個半周旋轉把兩個轉向點互換，所以拐點是 (p, m) 與 (q, n) 的中點，即 $\left(\frac{1}{2}(p+q), \frac{1}{2}(m+n)\right)$。

第 (iii) 部分

由極大點到極小點的落差，就是斜率的積分：

$$m - n = y(p) - y(q) = -\int_p^q 6(x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x.$$

> **想一想** 有沒有不必展開就能快速計算 $\int_p^q (x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x$ 的方法？

代入 $x = p + u$，於是 $x - q = u - h$，其中 $h = q - p$，而 u 由 0 變到 h：

$$\int_0^h u(u-h)\,\mathrm{d}u = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} = -\frac{h^3}{6}.$$

因此

$$m - n = -6\Big(-\frac{(q-p)^3}{6}\Big) = (q-p)^3,$$

正如所求。

第 (iv) 部分

在 $p \le x \le q$ 上，曲線由 m 遞減至 n，所以它位於 $y = n$ 之上或與之相接，而

$$\text{區域面積} R = \int_p^q (y-n)\,\mathrm{d}x.$$

三次式 $y - n = 2x^3 - bx^2 + cx - n$ 在 $x = q$ 處等於零，其導數在該處亦等於零，所以 $x = q$ 是二重根，並且

$$y - n = 2(x-q)^2(x-r)$$

對某個 r 成立。比較 x^2 的係數，$-2(2q + r) = -b = -3(p+q)$，所以 $r = \frac{1}{2}(3p - q)$。同樣設 $h = q - p$，並令 $u = x - q$（由 $-h$ 變到 0），

$$x - r = u + q - \tfrac{1}{2}(3p - q) = u + \tfrac{3}{2}h.$$

因此

$$\begin{aligned}\text{區域面積} R &= \int_{-h}^0 2u^2\big(u + \tfrac{3}{2}h\big)\,\mathrm{d}u = \Big[\tfrac{1}{2}u^4 + hu^3\Big]_{-h}^0 \\ &= -\big(\tfrac{1}{2}h^4 - h^4\big) = \tfrac{1}{2}h^4 = \tfrac{1}{2}(q-p)^4,\end{aligned}$$

這就是所求的結果。

驗算

取 $p = 1$，$q = 2$（符合條件，因為 $q < 3p$）。於是 $b = 9$，$c = 12$，而 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ 滿足 $y' = 6(x-1)(x-2)$，且 $m = y(1) = 5$ 及 $n = y(2) = 4 > 0$。所以 $m - n = 1 =$

$(q-p)^3$。拐點是 (1.5, 4.5)，即兩個轉向點的中點；把 $y-4$ 在 $[1,2]$ 上作數值積分，得 $0.5000 = \frac{1}{2}(q-p)^4$。我們亦以 2000 對滿足 $0 < p < q < 3p$ 的隨機數值驗證了全部四個結果。

常見錯誤

- 取 $q < p$：三次項係數為正時，極大點必定在極小點的左邊。
- 積分時用了 y 而不是 $y-n$，這樣會多算了直線 $y=n$ 之下、高度為 n 的長方形。
- 把對稱性說成是對直線 $x = \frac{1}{2}(p+q)$ 的反射；三次曲線具有的是繞一點的半周旋轉對稱，而不是鏡像對稱。

STEP 之外

每一條三次曲線都繞其拐點成半周旋轉對稱，因為平移 x 以消去 x^2 項（即卡爾達諾（Cardano）公式中所用的「缺項三次式」（depressed cubic）代換）之後，餘下的是一個奇函數加一個常數。第 (iv) 部分的二重根技巧，是相切與根的重數（multiplicity）理論的起點，這套理論在代數幾何（algebraic geometry）中佔有核心地位。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 載有更多同類風格的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。